या. पैरेलमान

मनोरंजक बीजगणित

$$(x+1)^2 = x(x+2)+1$$

Я. И. Перельман

ЗАНИМАТЕЛЬНАЯ АЛГЕБРА

Издательство «Наука». Москва

या. पेरेलमान

मनोरंजक बीजगणित

मीर प्रकाशन मास्को

पीपुल्स पब्लिशिंग हाउस (प्रा.) लिमिटेड
५ ई, रानी झांसी रोड, नई दिल्ली-११००५५

राजस्थान पीपुल्स पब्लिशिंग हाउस (प्रा.) लि.
चमेलीवाला मार्केट, एम. आई. रोड, जयपुर-302001

अनुवादक : देवेंद्र प्र० वर्मा

Ya. I. Perelman
ALGEBRA CAN BE FUN

На языке хинди

सोवियत संघ में मुद्रित

विषय-सूची

भूमिका 8

अध्याय 1. पांचवीं गणितीय संक्रिया 9

पांचवीं संक्रिया 9
खगोलिक संख्याएं 11
सारी हवा कितनी भारी होगी ? 12
दाह – बिना लौ और गर्मी के 14
मौसम की विविधता 15
ताले का मर्म 17
अंधविश्वासी सायकिल-सवार 19
दुगुना करते जाने का नतीजा 20
करोड़ों गुणा जल्द 22
प्रति सेकेंड 10 000 संक्रियाएं 27
शतरंज की संभव पार्टियों की संख्या 30
शतरंज खेलने वाली मशीन 33
तीन दुक्कों से 36
तीन तिक्कों से 38
तीन चौग्रों से 38
तीन समान् अंकों से 39
चार इकाइयों से 40
चार दुक्कों से 41

अध्याय 2. बीजगणित की भाषा 44

समीकरण रचने की कला 44
देओफांत का जीवन 46
घोड़ा और गधा 48
चार भाई 49
नदी पर चिड़ियां 51
सैर 53
घसियारे 54

मैदान में गायें 59
न्यूटन का प्रश्न 63
घड़ी की सूइयों का क्रमचय 65
घड़ी की सूइयों का संपातन 69
संख्या बूझने की कला 70
मिथ्या अर्थहीनता 76
समझदार समीकरण 77
मजेदार भी और अप्रत्याशित भी 78
नाई की दुकान में 81
ट्राम और पैदल यात्री 83
जहाज़ और बेड़ा 84
कौफी के डब्बे 86
डांस-पार्टी 88
समुद्री गुप्तचरी 89
सायकिल की सवारी 91
फटफटिया-रेस 92
औसत वेग 95
द्रुत कलनक मशीनें 97

अध्याय 3. अंकगणित के सहायतार्थ 110

क्षणिक गुणन 110
अंक 1, 5 और 6 113
संख्याएं 25 और 76 114
अनंत 'संख्याएं' 115
कितने दिये ? 119
11 से विभाज्यता 121
कार का नंबर 124
19 से विभाज्यता 126
सोफिया जेर्मेन का साध्य 127
गुणज संख्याएं 128
रूढ़ संख्याओं की संख्या 131
ज्ञात महत्तम रूढ़ संख्या 132
जिम्मेदारी का हिसाब 133
बिना बीजगणित के और भी आसान 137

अध्याय 4. देओफांत के समीकरण 139

स्वेटर की खरीद 139
दूकान का लेखा-निरीक्षण 144
डाक-टिकटों की खरीद 147
फलों की खरीद 149
जन्म-दिन ताड़ना 151
मुर्गियों की बिक्री 154
दो संख्याएं और चार संक्रियाएं 157
कौनसा आयत 159
दो अंकों वाली दो संख्याएं 160
पीथागोरसी संख्याएं 161
तीसरे घात का अनिश्चित समीकरण 166
एक साध्य सिद्ध करने के लिये एक लाख 171

अध्याय 5. छठी गणितीय संक्रिया 174
छठी संक्रिया 174
क्या बड़ा है? 176
एक नज़र में हल 178
बीजगणितीय प्रहसन 179

अध्याय 6. द्वितीय घात के समीकरण 183
हाथ मिलाना 183
मधुमक्खियों का झुंड 184
बंदरों का झुंड 186
दूरदर्शी समीकरण 186
ऐलर का प्रश्न 188
लाउड स्पीकर 190
चांद की उड़ान का बीजगणित 192
"कठिन प्रश्न" 197
कौनसी संख्याएं 199

अध्याय 7. अधिकतम और अल्पतम मान 201
दो रेलगाड़ियां 201
हाल्ट कहां बने? 203
सड़क कैसे बनायी जाये? 207
गुणनफल कब अधिकतम होता है? 210
योगफल कब अल्पतम होता है? 215
अधिकतम आयतन का टुकड़ा 216
जमीन के दो टुकड़े 217
पतंग 218
घर का जीर्णोद्धार 220
फुलवारी 222
नाली का अधिकतम अनुप्रस्थ काट 224
अधिकतम आयतन का शंकु 226
अधिकतम प्रकाश 228

अध्याय 8. श्रेढ़ी 232
प्राचीनतम श्रेढ़ी 232
खानेदार कागज पर बीजगणित 233
सिंचाई 235
मुर्गियों का चारा 236
बेलदारों का टोली 238
सेब 239
घोड़े की खरीद 240
योद्धा का पुरस्कार 242

अध्याय 9. गणित की सातवीं संक्रिया 244
सातवीं संक्रिया 244
लगरथों के प्रतियोगी 246
लगरथी सारणियों का विकास 247
लगरथी अजूबे 249
मंच पर लगरथ 250
मवेशी-पालन में लगरथ 253
संगीत में लगरथ 255
सितारे, शोर और लगरथ 257
बल्ब का प्रकाश और लगरथ 259
सौ साल की वसीयत 261
पूंजी की बढ़ोत्तरी 264
संख्या 'e' 265
लगरथी प्रहसन 268
हर संख्या – तीन दुक्कों से 269

भूमिका

यह पुस्तक बीजगणित सीखने के लिये नहीं है। इस 'माला' की मेरी अन्य रचनाओं की तरह "मनोरंजक बीजगणित" भी कोई पाठ्यपुस्तक नहीं है, यह स्वतंत्र रूप से स्वयं पढ़ने के लिये है। यह ऐसे पाठकों के लिये लिखी गयी है, जिन्हें बीजगणित का कुछ ज्ञान प्राप्त हो चुका है, लेकिन हो सकता है कि वे उसे अच्छी तरह से आत्मसात नहीं कर पाये हैं या बहुत हद तक भूल चुके हैं। "मनोरंजक बीजगणित" का लक्ष्य है पाठक में इस अधूरे ज्ञान को पूर्ण करना, उसे ठोस तथा गहन करना, और सबसे बड़ी बात है–पाठक में बीज-गणित के प्रति रुचि उत्पन्न करना, पाठ्यपुस्तकों को पढ़कर अपनी कमजोरी खुद दूर करने की अभिलाषा जागृत करना।

विषय को मनोरंजक बनाने के लिये, उसके प्रति रुचि जगाने के लिये मैंने विभिन्न साधनों का सहारा लिया है: मनोरंजक कथा-नकों पर आधारित प्रश्न संकलित किये हैं, गणित के इतिहास से रोचक तथ्य लिये हैं, व्यावहारिक जीवन में बीजगणित के अप्रत्याशित उपयोग दिखाये हैं।

अध्याय 1.

पाँचवीं गणितीय संक्रिया

पाँचवी संक्रिया

बीजगणित को अक्सर "सात संक्रियाओं वाला अंकगणित" कहते हैं–इस बात पर जोर देने के लिये कि वह चार सर्वविदित गणितीय संक्रियाओं के अतिरिक्त तीन नयी संक्रियाओं–घातन और इसकी दो प्रतीप (उल्टी) संक्रियाओं –का भी अध्ययन करता है।

बीजगणित पर हमारी बातचीत पाँचवी संक्रिया–घातन–से शुरू होगी। (किसी संख्या को स्वयं से एक नियत संख्या बार गुणा करने की क्रिया को घातन कहते हैं)।

क्या इस नयी संक्रिया की आवश्यकता हमारे व्यावहारिक जीवन में उत्पन्न होती है? बिल्कुल। यथार्थ दुनिया में हमें अक्सर इससे वास्ता पड़ता रहता है। आप क्षेत्रफल और आयतन कलन करने की उन अनेकानेक परिस्थितियों की याद करें, जिनमें संख्या का दूसरा और तीसरा घात प्राप्त करना पड़ता है। आगे: गुरुत्वाकर्षण-बल, स्थैतिक वैद्युत तथा चुंबकीय व्यतिक्रियाओं के बल, प्रकाश और ध्वनि दूरी के दूसरे घात के समानुपात में क्षीण होते हैं। सूर्य के गिर्द ग्रहों का (और ग्रहों के गिर्द उपग्रहों का) परिक्रमण-काल पक्रिमण-केन्द्र की दूरी के साथ घातीय निर्भरता द्वारा ही संबंधित होता है: परिक्रमण-कालों के द्वितीय घातों का अनुपात वैसा ही होता है, जैसा दूरियों के तीसरे घातों का।

यह न सोचें कि व्यवहार में हमें सिर्फ दूसरे व तीसरे घातों की आवश्यकता होती है तथा अधिक उच्च घात सिर्फ बीजगणितीय अभ्यासों

में मिलते हैं। इंजिनियर किसी वस्तु की मजबूती के आकलन में अक्सर चौथे घातों की सहायता लेता है और अन्य आकलनों में (जैसे वाष्प-वाही नलियों के व्यास निर्धारित करने में) उसे छठे घात की भी आवश्यकता पड़ती है। बहता पानी पत्थर को जिस बल से घसीटता है, उसका अन्वीक्षण करते वक्त जल-तकनीशियन को भी छठे घात वाली निर्भरता प्राप्त होती है: यदि एक नदी में धारा का वेग दूसरी नदी की अपेक्षा चौगुना अधिक है, तो तेज नदी अपने तल पर 4^6, अर्थात् 4096 गुना अधिक भारी पत्थर लुढ़का सकती है, बनिस्बत कि मंद नदी।[1]

जब हम तप्त पिंड – जैसे बल्ब के भीतर पतले गर्म तार – में तापक्रम पर चमक की निर्भरता का अध्ययन करते हैं, तो हमें और भी उच्च घात मिलते हैं। सफेद तप्त पिंड में चमक तापक्रम के बारहवें घात के साथ समानुपाती होती है और लाल तप्त पिंड में तापक्रम के तीसवें घात के साथ समानुपाती होती है। याद दिला दें कि यहां तापक्रम परम इकाइयों – केल्विन (K) – में नापा जाता है, जिसका शून्य ऋण 273°C से शुरू होता है। इसका मतलब है कि पिंड को (उदाहरण के लिये) 2000 से 4000 K तक, अर्थात् दो गुना अधिक गर्म करने पर वह 2^{12} गुना, अर्थात् 4000 से भी ज्यादा गुना अधिक चमकदार हो जाता है। बल्ब-निर्माण के तकनीक में यह विशेष ढंग की निर्भरता कौनसी भूमिका अदा करती है, इसके बारे में अन्यत्र बात होगी।

---

[1] इसके बारे में सविस्तार देखें मेरी पुस्तक 'मनोरंजक यांत्रिकी', अध्याय 9।

खगोलिक संख्याएं

पाँचवीं गणितीय संक्रिया का उपयोग शायद ही कोई इतना करता हो, जितना खगोलशास्त्री करते हैं। ब्रह्मांड का अन्वीक्षण करने वालों को हर कदम पर विराट संख्याओं का सामना पड़ता है, जिनमें एक-दो सार्थक अंक होते हैं और बाकी ढेर सारे शून्य ही शून्य होते हैं। इन्हें खगोलीय संख्या की संज्ञा ठीक ही दी गयी है। ऐसी विराट संख्याओं को सामान्य रूप में लिखने पर, विशेषकर कलन में, बहुत ही असुविधा होती। उदाहरणस्वरूप, आंद्रोमेदा की निहारिका किलोमीटरों में हमसे इतनी दूर है:

95 000 000 000 000 000 000

पर खगोलिक कलनों में दूरियों को किलोमीटरों या अन्य बड़ी इकाइयों की जगह अक्सर सेंटीमीटरों में व्यक्त करना पड़ता है। अतः उपरोक्त दूरी ऐसी संख्या से व्यक्त होगी, जिसमें पाँच शून्य और अधिक होंगे:

9 500 000 000 000 000 000 000 000

तारों का द्रव्यमान और भी बड़ी संख्याओं से व्यक्त होता है, विशेषकर उसे ग्राम में व्यक्त करने पर (यह कई प्रकार के कलनों में आवश्यक होता है)। ग्राम में हमारे सूर्य का द्रव्यमान इतना है:

1 983 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000.

आप खुद कल्पना कर सकते हैं कि इतनी भारी-भरकम संख्याओं के साथ कलन कितना कठिन होगा और उसमें कितनी आसानी से गलती हो जा सकती है। और ये कुछ ज्यादा बड़ी खगोलिक संख्याएं नहीं हैं!

पाँचवी गणितीय संक्रिया इस कठिनाई से बचने के लिये बहुत आसान तरीका बताती है। इकाई समेत शून्यों की कतार दस का एक निश्चित घात होती है:

$$100 = 10^2,\ 1000 = 10^3,\ 10\,000 = 10^4$$ आदि.

इसीलिये उपरोक्त दैत्य संख्याएं निम्न रूपों में प्रस्तुत की जा सकती हैं:

पहली संख्या . . . . $95 \cdot 10^{23}$,
दूसरी संख्या . . . . $1983 \cdot 10^{30}$.

यह सिर्फ जगह बचाने के लिये नहीं किया जाता, इससे कलन भी सरल हो जाते हैं। उदाहरण के लिये, यदि इन संख्याओं को आपस में गुणा करना है, तो गुणनफल $95 \cdot 1983 = 188385$ ज्ञात कर लीजिये और इसके बाद गुणक $10^{23+30} = 10^{53}$ लगा दीजिये; यह काफी रहेगा:

$$95 \cdot 10^{23} \cdot 1983 \cdot 10^{30} = 188\,385 \cdot 10^{53}.$$

यह निस्संदेह सुविधाजनक है। 23 शून्यों वाली संख्या और 30 शून्यों वाली संख्या लिखकर सामान्य गुणा से अंत में 53 शून्यों वाली संख्या लिखने की तुलना में यह विधि सुविधाजनक ही नहीं, विश्वस्त भी है, क्योंकि दसियों शून्य लिखने में एकाध छूट भी जा सकता है। फिर परिणाम गलत मिलेगा!

सारी हवा कितनी भारी होगी?

बड़ी संख्याओं के घातीय रूप उपयोग में लाने पर व्यावहारिक कलन कितना सरल हो जाता है, यह देखने के लिये एक हिसाब

लगाते हैं: पृथ्वी का द्रव्यमान उसके वातावरण के द्रव्यमान से कितना गुना अधिक है।

धरातल के हर वर्ग सेंटीमीटर क्षेत्र को हवा करीब एक किलोग्राम के बल से दाबती है। इसका मतलब है कि $1 cm^2$ क्षेत्र पर खड़े वायु-स्तंभ का भार 1kg है। पृथ्वी के पूरे वातावरण (वात + आवरण) को ऐसे ही वायु-स्तंभों को सटा-सटा कर रखने से बना हुआ माना जा सकता है। इन वायु-स्तंभों की कुल संख्या उतनी होगी, जितने वर्ग सेंटीमीटर पृथ्वी की सतह (धरातल) पर होंगे। किसी ज्ञान-कोश में देखकर जान सकते हैं कि धरातल का कुल क्षेत्रफल 51 करोड़ वर्ग किलोमीटर, अर्थात् $51 \cdot 10^7 km^2$ है।

अब देखें कि एक वर्ग किलोमीटर में कितने वर्ग सेंटीमीटर होंगे। रैखिक किलोमीटर में 1 000 मीटर होते हैं और हर मीटर में 100 सेंटीमीटर होते हैं, अत: रैखिक किलोमीटर में 10^5 सेंटीमीटर हुए। वर्ग किलोमीटर में $(10^5)^2 = 10^{10}$ वर्ग सेंटीमीटर हुए। अतः धरातल पर वर्ग सेंटीमीटरों की कुल संख्या होगी:

$$51 \cdot 10^7 \cdot 10^{10} = 51 \cdot 10^{17}.$$

पृथ्वी का वातावरण इतना ही किलोग्राम भारी है; इसे टन में व्यक्त करने पर मिलेगा:

$$51 \cdot 10^{17} : 1000 = 51 \cdot 10^{17} : 10^3 = 51 \cdot 10^{17-3} = 51 \cdot 10^{14} \text{ टन।}$$

पृथ्वी का द्रव्यमान है:

$$6 \cdot 10^{21} \text{ टन।}$$

हमारा ग्रह अपने वातावरण से कितना गुना भारी है, यह निर्धारित करने के लिये भाग देते हैं:

$$6 \cdot 10^{21} : 51 \cdot 10^{14} \approx 10^6,$$

अर्थात् वातावरण का द्रव्यमान पृथ्वी के द्रव्यमान का लगभग दस लाखवां अंश है।

दाह — बिना लौ और गर्मी के

यदि आप रसायनविद से पूछेंगे कि लकड़ी या कोयला ऊँचे तापक्रम पर ही क्यों जलता है, तो वह बतायेगा कि वास्तविकता में कार्बन और आक्सीजन का संयोजन हर तापक्रम पर होता रहता है, पर कम तापक्रमों पर यह प्रक्रिया वहुत धीमी है (अर्थात् प्रतिक्रिया में अणुओं की नगण्य संख्या ही भाग ले पाती है), इसीलिये अनवलोकित रहती है। रसायनिक प्रतिक्रियाओं की चाल निर्धारित करने वाला नियम कहता है कि तापक्रम के 10° घटने पर प्रतिक्रिया की चाल (उसमें भाग लेने वाले अणुओं की संख्या) दुगुनी कम हो जाती है।

उपरोक्त बात को लकड़ी और आक्सीजन के संयोजन की प्रतिक्रिया, अर्थात् लकड़ी जलने की प्रक्रिया, पर लागू करते हैं। मान लें कि लौ का तापक्रम 600° होने पर प्रति सेकेंड 1 ग्राम लकड़ी जलती है। 20° पर 1 ग्राम लकड़ी कितने समय में जलेगी? हम अब जान चुके हैं कि ऐसे तापक्रम पर, जो $580 = 58 \cdot 10$ डिग्री कम है, प्रतिक्रिया की चाल

$$2^{58} \text{ गुनी}$$

कम होगी, अर्थात् 1 ग्राम लकड़ी के जलने में 2^{58} सेकेंड लगेगा।

कितने वर्ष के बराबर है यह अंतराल? सन्निकट रूप से यह कलन करने के लिये हमें न तो दो को 57 बार गुना करने की आवश्य-

करना है, न लगरथी[1] सारणी के उपयोग की। हम निम्न मान्यता का उपयोग करेंगे :

$$2^{10} = 1024 \approx 10^3.$$

इसलिये

$$2^{58} = 2^{60-2} = 2^{60} : 2^2 = \frac{1}{4} \cdot 2^{60} = \frac{1}{4} \cdot (2^{10})^6 \approx \frac{1}{4} \cdot 10^{18},$$

अर्थात् लगभग चौथाई ट्रिलियन सेकेंड। वर्ष में करीब 300 लाख, अर्थात् $3 \cdot 10^7$ सेकेंड होते हैं, अत :

$$\left(\frac{1}{4} \cdot 10^{18}\right) : (3 \cdot 10^7) = \frac{1}{12} \cdot 10^{11} \approx 10^{10}.$$

दस अरब वर्ष! लगभग इतने समय में बिना लौ और गर्मी के एक ग्राम लकड़ी का दाह हो सकेगा।

इस प्रकार, लकड़ी और कोयला बिना जलाये हुए भी सामान्य तापक्रम पर जलते रहते हैं। आग प्राप्त करने के औजारों की खोज ने इस भयानक रूप से मंद प्रक्रिया को करोड़ों करोड़ गुना तेज कर दिया है।

मौसम की विविधता

प्रश्न

मौसम में भेद सिर्फ एक दृष्टिकोण से करेंगे : धूप है या बादल। क्रम-भिन्नता के अनुसार असमान सप्ताहों की संख्या कितनी होगी?

---

[1] दे. अध्याय 5, पृ 174।—अनु.

आपको लगेगा कि ज्यादा नहीं होगी : एक-दो महीना बीत जायेगा और सप्ताह में धूप व बादल के सभी क्रमचय समाप्त हो जायेंगे ; फिर तो कोई-न-कोई पुराना क्रमचय दुहरा जायेगा, जो पहले प्रेक्षित हुआ होगा।

लेकिन अब ठीक-ठीक हिसाब लगाने की कोशिश करें कि इन परिस्थितियों में कितने भिन्न प्रकार के सप्ताह संभव हैं। यह एक ऐसी समस्या है, जिसमें अप्रत्याशित रूप से पाँचवीं गणितीय संक्रिया का उपयोग होने लगता है।

अतः प्रश्न है : एक सप्ताह के दौरान धूप और बादल कितने भिन्न क्रम में आ सकते हैं? (यहां यह भी माना गया है कि पूरे दिन या तो धूप उगी रहेगी, या बादल छाया रहेगा ; आधा दिन धूप और आधा दिन बादल जैसी संभावना को अनुपस्थित करार किया गया है।—अनु.)

हल

सप्ताह के प्रथम दिन या तो धूप होगी या बादल ; अतः अबतक दो भिन्न क्रमचय मिल रहे हैं।

दो दिनों के दौरान धूप और बादल निम्न क्रम में हो सकते हैं :

धूप और धूप
धूप और बादल
बादल और धूप
बादल और बादल

अतः दो दिनों में 2^2 प्रकार के भिन्न क्रम संभव हैं।

तीन दिन के अंतराल में इन चार में से प्रत्येक क्रम-भिन्नता तीसरे

दिन की दो संभावनाओं में से किसी भी एक के साथ स्थान ले सकती है, अतः कुल क्रमचय होंगे :

$$2^2 \cdot 2 = 2^3.$$

चार दिनों में क्रमचयों की संख्या होगी :

$$2^3 \cdot 2 = 2^4.$$

पाँच दिनों में 2^5, छे दिनों में 2^6 और अंततः सप्ताह में $2^7 = 128$ क्रमचय होंगे।

इससे निष्कर्ष निकलता है कि धूप और बादल वाले दिनों के भिन्न क्रमों वाले सप्ताहों की कुल संख्या 128 है। $128 \cdot 7 = 896$ दिन बीत जाने पर कोई पुराना क्रमचय अवश्य ही दुहरायेगा। बेशक, दुहरा पहले भी सकता है, पर 896 दिन वह अवधि है जिसके बीतने पर किसी न किसी क्रमचय का दुहरा कर आना अवश्यंभावी है। इसके विपरीत, दो साल क्या, इससे अधिक (2 वर्ष और 166 दिन) की अवधि बीत जा सकती है, जिसमें मौसम-क्रम के अनुसार कोई भी दो सप्ताह शायद समान नहीं होंगे।

ताले का मर्म

प्रश्न

एक सोवियत प्रतिष्ठान में क्रांतिपूर्व की तिजोरी रखी हुई मिली। उसकी चाबी भी मिल गयी, लेकिन इसे लगाने के लिये पहले ताले का मर्म जानना जरूरी था। उसके दरवाजे पर पाँच चकतियां लगी हुई थीं और हरेक की किनारी पर 36 अक्षर खुदे हुए थे। चकतियों को घुमा कर एक खास शब्द बनाने के बाद ही चाबी लगती थी। यह शब्द

कोई नहीं जानता था और तिजोरी तोड़ना भी कोई नहीं चाहता था, इसलिये चकतियों पर खुदे अक्षरों के सभी क्रमचयों को आजमाने का निश्चय किया गया। एक क्रमचय बनाकर उसे आजमाने में तीन सेकेंड लगते थे।

क्या 10 कार्य-दिवस के दौरान तिजोरी खोलने की आशा की जा सकती है?

हल

गिनती करें कि अक्षरों के कुल कितने क्रमचयों को आजमाना था।

पहली चकती के 36 अक्षरों में से हरेक को दूसरी चकती के 36 अक्षरों में से हरेक के साथ मिलाया जा सकता था, अतः दो अक्षरों के क्रमचयों की संख्या होती:

$$36 \cdot 36 = 36^2.$$

इनमें से हर क्रमचय को तीसरी चकती के 36 अक्षरों में से हरेक के साथ मिलाया जा सकता था, अत: कुल क्रमचय होती:

$$36^2 \cdot 36 = 36^3.$$

इसी प्रकार निर्धारित करते हैं कि चार अक्षरों के क्रमचयों की संख्या 36^4 होती और पाँच अक्षरों के क्रमचयों की संख्या 36^5 या 60466176 होती। 6 करोड़ से अधिक इन क्रमचयों को आजमाने में

$$3 \cdot 60\,466\,176 = 181\,398\,528$$

सेकेंड लगते (एक क्रमचय आजमाने में 3 सेकेंड लगते हैं)। यह 50 000 घंटों से अधिक है; यदि 8 घंटों का कार्य-दिवास लिया जाये, तो इसमें लगभग 6 300 कार्य-दिवस होते, जिहें पूरा करने में 20 वर्ष से भी अधिक समय लगता।

मतलब यह है कि 10 कार्य-दिवस के दौरान तिजोरी खुल जायेगी, इसकी संभाव्यता 6 300 में सिर्फ 10 या 630 में सिर्फ एक है। यह बहुत ही छोटी संभाव्यता है।

अंधविश्वासी सायकिल-सवार

प्रश्न

मोटर-गाड़ियों की तरह पहले सायकिलों का भी लाइसेंस बनता था और उनमें छे अंकों वाला नंबर लगता था।

एक आदमी ने सायकिल खरीदी। वह बहुत ही अंधविश्वासी था। जब उसे पता चला कि सायकिलों में "अट्ठा" नामक एक "ऐब" होता है, उसने सोचा कि यदि सायकिल के नंबर में एक भी अंक 8 होगा तो उसे हर कदम पर दुर्भाग्य का सामना करना पड़ेगा। लेकिन जब वह लाइसेंस बनवाने जा रहा था, उसने अपने मन को निम्न तर्क से सांत्वना देने की कोशिश की। कोई भी संख्या दस अंकों – 0, 1, ..., 9 – की सहायता से लिखी जाती है; इसमें 'कुलक्षण' अंक सिर्फ 8 है, अत: 'कुलक्षण' संख्या (नंबर) मिलने की संभावना दस में सिर्फ एक है।

क्या उसका तर्क सही है?

हल

नंबरों की कुल संख्या 999 999 है: 000 001, 000 002 आदि से लेकर 999 999 तक। देखें कि इनमें 'सुलक्षण' नंबर कितने हैं। प्रथम स्थान पर नौ में से कोई भी एक सुलक्षण अंक 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7,

9 हो सकता है। दूसरे स्थान पर भी इन्हीं में से कोई एक अंक होगा। अतः दो अंकों वाले 'सुलक्षण' क्रमचय $9 \cdot 9 = 9^2$ होंगे। इनमें से हर क्रमचय के साथ तीसरे स्थान के नौ अंकों में से कोई एक अंक मिलाया जा सकता है, अतः तीन अंकों वाले 'सुलक्षण' क्रमचयों की संख्या $9^2 \cdot 9 = 9^3$ होगी।

इसी विधि से आगे बढ़ते हुए हम निर्धारित करते हैं कि छे अंकों वाले 'सुलक्षण' क्रमचयों की कुल संख्या 9^6 होगी। पर यह ध्यान में रखना चाहिये कि इनके बीच एक क्रमचय 000 000 भी है, जो सायकिल-नंबर के रूप में उपयुक्त नहीं है। अतः सुलक्षण नंबरों की संख्या वास्तविकता में $9^6 - 1 = 531\,440$ है, जो कुल संख्या (999 999) का सिर्फ 53% अंश है, न कि 90% अंश, जैसा सायकिल वाले ने सोचा था।

यदि सायकिल के नंबर सात अंकों वाले होते, तो उनके बीच 'कुलक्षण' नंबर अधिक होते बनिस्बत कि 'सुलक्षण' नंबर। इस कथन की जाँच का काम हम पाठकों पर छोड़ देते हैं।

दुगुना करते जाने का नतीजा

छोटी-सी राशि को दुगुना करते जाने पर उसकी द्रुत वृद्धि का आश्चर्यजनक उदाहरण शतरंज-आविष्कारक के इनाम से संबंधित एक दंतकथा है।[1] इस विख्यात उदाहरण को छोड़ कर हम यहां कुछ अन्य उदाहरण दे रहे है, जिन्हें बहुत कम लोग जानते हैं।

---

[1] दे. मेरी पुस्तक "सरस गणित", अध्याय 7।

प्रश्न

इन्फुजोरिया पारामेसियम[1] औसतन हर 27 घंटे में विभक्त होता है। यह मान कर कि इस तरह से जन्मे सभी इन्फुजोरिया जीवित रहते हैं, बतायें: कितने समय में एक इन्फुजोरिया की सारी संततियों का कुल आयतन सूर्य के आयतन के बराबर हो जायेगा।

कलन के लिये प्रत्तांक: 40-वीं संतति तक के पारामेसियम मिल-कर $1 m^3$ आयतन छेंकते हैं। सूर्य का आयतन $10^{27} m^3$ है।

हल

पहले हमें निर्धारित करना है कि $1 m^3$ को कितनी बार दुगुना करें कि $10^{27} m^3$ आयतन मिल जाये। निम्न रुपांतरण देखें:

$$10^{27}=(10^3)^9 \approx (2^{10})^9=2^{90},$$

क्योंकि $2^{10} \approx 1\,000$ है।

इसका मतलब है कि चालीसवीं संतति के बाद और भी 90 विभाजन होने चाहिये, जिससे जन्मी सभी इन्फुजोरिया का कुल आयतन सूर्य जितना हो जायेगा।

संततियों की कुल संख्या $40+90=130$ हुई। आसानी से हिसाब लगा सकते हैं कि इसमें 147 दिन लगेंगे।

ध्यान देने योग्य है कि एक सूक्ष्म जीववैज्ञानिक (मेताल्निकोव) ने पारामेसियमों के 8 061 विभाजन प्रेक्षित किये। यदि इनमें से

---

[1] Infusoria Paramecium, सरलतम प्रकार का एकल कोशि-कीय जंतु, पपनियों के सहारे गति करता है; अन्य एकल कोशिकीय से इस बात में भिन्न है कि इसकी कोशिका में दो नाभिक होते हैं – लघु नाभिक पर प्रजनन (विभाजन) की जिम्मेवारी होती है और वृहत नाभिक पर पदार्थ-विनिमय तथा विकास की। – अनु.

एक की भी मृत्यु नहीं होती, तो इतनी संततियों का कितना बड़ा आयतन होता—यह निर्धारित करना मैं पाठकों पर छोड़ देता हूँ।

दिये गये प्रश्न को विपरीत रूप में भी देख सकते हैं।

कल्पना करें कि हमारा सूर्य दो भागों में विभक्त हो जाता है, फिर हर अर्ध भी आधा हो जाता है, आदि। इन्फुजोरिया के बराबर कण प्राप्त करने के लिये इस तरह कितने विभाजन होने चाहियें?

उत्तर पाठकों को पता ही है—130, फिर भी आश्चर्य होता है कि सूरज से इन्फुजोरिया जितना छोटा कण प्राप्त करने के लिये उसे सिर्फ 130 बार आधा करना पड़ेगा।

मुझे यह प्रश्न एक अन्य रूप में दिया गया था:

कागज के पन्ने को आधा फाड़ते हैं, फिर आधे को आधा फाड़ते हैं, आदि। परमाणु के आकार का कण प्राप्त करने के लिये उसे कितनी बार फाड़ना पड़ेगा?

मान लें कि पन्ना 1g भारी है, और परमाणु के भार की राशि करीब $\frac{1}{10^{24}}g$ की है। अंतिम व्यंजन में 10^{24} की जगह इसका सन्निकट मान 2^{80} रखते हैं। इससे स्पष्ट है कि कागज को सिर्फ 80 बार ही फाड़ना होगा; करोड़ों बार फाड़ने की—जैसा कि कुछ लोग जवाब देते हैं—कोई जरूरत नहीं है।

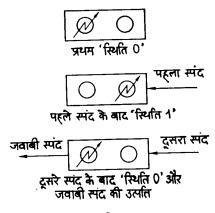
करोड़ों गुना जल्द

त्रिगर नामक वैद्युत उपकरण में दो एलेक्ट्रोनी बल्ब होते हैं—लगभग वैसे ही, जैसे रेडियो-सेट में।[1] त्रिगर में विद्युत-धारा किसी एक बल्ब से ही गुजर सकती है: या 'बायें' बल्ब से या 'दायें' से। त्रिगर

---

[1] एलेक्ट्रोनी बल्बों की जगह ट्रांजिस्टर या तथाकथित ठोस (झिल्लीदार) सर्किट भी हो सकते हैं, इससे कोई फर्क नहीं पड़ता।

में दो संपर्क-बिन्दु होते हैं, जिनके सहारे बाहर से क्षणिक वैद्युत संकेत (स्पंद) प्रविष्ट होते हैं; दो और संपर्क-बिन्दु होते हैं, जिनसे होकर त्रिगर से जवाबी स्पंद निकलते हैं। वाह्य स्पंद प्रविष्ट होने के क्षण त्रिगर में बदलाव आता है: जिस बल्ब से धारा गुजर जाती है, वह बुझ जाता है, और धारा दूसरे बल्ब से गुजरने लगती है। त्रिगर से जवाबी स्पंद उस क्षण निकलता है, जब दायां बल्ब बुझ जाता है और बायां जल उठता है।

अब देखें कि एक के बाद एक लगातार कई वैद्युत स्पंद भेजने पर त्रिगर कैसे काम करेगा। त्रिगर की अवस्था का मूल्यांकन दायें बल्ब के अनुसार करेंगे: यदि धारा दायें बल्ब से होकर नहीं गुजरती है, तो कहेंगे कि त्रिगर 'स्थिति-0' में है, और यदि धारा दायें बल्ब से गुजर रही है, तो कहेंगे कि त्रिगर 'स्थिति-1' में है।

चित्र 1

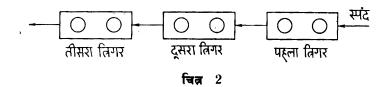
मान लें कि शुरू में त्रिगर स्थिति-0 में है, अर्थात् धारा बायें बल्ब से गुजर रही है (चित्र 1)। प्रथम स्पंद भेजने पर धारा दायें बल्ब

से गुजरने लगेगी, अर्थात् त्रिगर स्थिति-1 में आ जायेगा। लेकिन इससे जवाबी स्पंद त्रिगर से नहीं निकलेगा क्योंकि जवाबी संकेत सिर्फ दायां बल्ब बुझने के क्षण प्राप्त होता है, बायां बल्ब बुझने के क्षण नहीं।

दूसरे स्पंद के बाद धारा अब बायें बल्ब से गुजरेगी, अर्थात् त्रिगर पुनः स्थिति-0 में आ जायेगा। लेकिन इस प्रक्रिया के साथ त्रिगर जवाबी संकेत (स्पंद) भी भेज देगा।

परिणमस्वरूप (दो स्पंदों के बाद) त्रिगर पुनः आरंभिक अवस्था में आ जायेगा। इसीलिये तीसरे स्पंद के बाद (प्रथम स्पंद के बाद जैसा ही) त्रिगर स्थिति-1 में आ जायेगा और चौथे स्पंद के बाद (दूसरे स्पंद के बाद जैसा) जवाबी स्पंद देने के साथ-साथ स्थिति-0 में आ जायेगा। हर दो स्पंदों के बीच त्रिगर की अवस्थाएं इसी क्रम में दुहरायेंगी।

अब मान लें कि एक नहीं, कई त्रिगर हैं और बाहर से स्पंद प्रथम त्रिगर में आता है, प्रथम का जवाबी स्पंद दूसरे त्रिगर में आता है, दूसरे त्रिगर का जवाबी स्पंद तीसरे त्रिगर में आता है, आदि (चित्र 2 में त्रिगर दायीं से बायीं ओर एक के आता एक जुड़े हुए हैं)। देखें कि त्रिगरों की ऐसी श्रृंखला किस तरह से काम करती है।

चित्र 2

मान लें कि शुरू में सभी त्रिगर स्थिति-0 में थे। अतः (उदाहरणतया) पाँच त्रिगरों के लिये हमारे पास क्रमचय 00000 था।

प्रथम स्पंद भेजने पर प्रथम त्रिगर (सबसे दायां वाला) स्थिति-1 में आ जायेगा; चूंकि इस स्थिति में जवाबी स्पंद नहीं मिलेगा, इसलिये बाकी त्रिगर स्थिति-0 में ही रहेंगे और पूरी श्रृंखला क्रमचय 00001 द्वारा लंछित होगी। दूसरे स्पंद के बाद प्रथम त्रिगर स्थिति-0 पर आ जायेगा और साथ ही जवाबी स्पंद भेजेगा जो दूसरे त्रिगर को स्थिति-1 पर ला देगा। बाकी त्रिगर स्थिति-0 पर ही रहेंगे, अर्थात् क्रमचय 00010 प्राप्त होगा। तीसरे स्पंद के बाद प्रथम त्रिगर स्थिति-1 में आ जायेगा और बाकी त्रिगर पहले की अवस्था में रहेंगे। क्रमचय 00011 प्राप्त होगा। चौथे स्पंद से प्रथम त्रिगर जवाबी स्पंद भेजता हुआ स्थिति-0 में आयेगा; इस जवाबी स्पंद से दूसरा त्रिगर स्थिति-0 में आने के साथ-साथ अपने जवाबी स्पंद से तीसरे त्रिगर को स्थिति-1 में ला देगा। परिणामस्वरूप क्रमचय 00100 मिलेगा।

इस विचार-क्रम को बढ़ाया जा सकता है। परिणामों को सारणीबद्ध कर सकते हैं:

1 - ले	स्पंद	से	–	क्रमचय	00001
2 - रे	«	«	–	«	00010
3 - रे	«	«	–	«	00011
4 - थे	«	«	–	«	00100
5 - वें	«	«	–	«	00101
6 - ठे	«	«	–	«	00110
7 - वें	«	«	–	«	00111
8 - वें	«	«	–	«	01000

हम देखते हैं कि त्रिगरों की श्रृंखला बाहर से आये संकेतों को 'गिनती' जाती है और उनकी संख्या को अपने विशेष ढंग से लिखती भी जाती है। यह भी आसानी से देख सकते हैं कि श्रृंखला संकेतों को दशमलव प्रणाली में नहीं लिखती है, जिसके हम लोग आदी हैं, बल्कि द्विभू प्रणाली में लिखती है।

द्विभू प्रणाली में हर संख्या सिर्फ शून्यों ग्रौर इकाइयों की सहायता से लिखी जाती है। किसी भी श्रेणी की तुलना में ग्रगली श्रेणी की इकाई सामान्य दशमलव प्रणाली की तरह दस गुनी नहीं, सिर्फ दो गुनी होती है। द्विभू प्रणाली में ग्रंतिम स्थान पर (सबसे दायें) स्थित इकाई साधारण इकाई है। ग्रगली श्रेणी (दायें से दूसरे स्थान) की इकाई का ग्रर्थ है दो, इससे ग्रगली श्रेणी की इकाई का ग्रर्थ है चार, इसके बाद ग्राठ, सोलह, ग्रादि।

उदाहरणार्थ, संख्या $19 = 16 + 2 + 1$ द्विभू प्रणाली में निम्न प्रकार से लिखी जायेगी:

10011

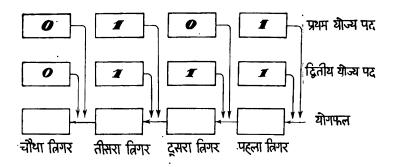
इस तरह, त्रिगरों की श्रृंखला भेजे गये संकेतों की 'गणना' करती है ग्रौर उनकी संख्या को द्विभू प्रणाली में 'लिखती' जाती है। यह भी बता दें कि त्रिगर की ग्रवस्था में परिवर्तन, ग्रर्थात् एक ग्रागत स्पंद का ग्रभिलेखन, सेकेंड के दस करोड़वें ग्रंश में संपन्न होता है! त्रिगरों पर ग्राधारित ग्राधुनिक गणक मशीनें एक सेकेंड में करोड़ों स्पंदों की गिनती कर सकती हैं। बिना किसी उपकरण के ग्रादमी जिस रफ्तार से गिन सकता है, उससे यह लाखों गुना तेज है, ग्रादमी की ग्राँख एक के बाद एक गुजरते संकेतों को ग्रलग-ग्रलग तभी देख सकती है, जब एक के बाद दूसरा संकेत 0.1 सेकेंड से कम समय में न ग्राता हो।

यदि बीस त्रिगरों की श्रृंखला बनायी जाये, ग्रर्थात् भेजे गये संकेतों की संख्या को द्विभू प्रणाली के बीस ग्रंकों की सहायता से लिखा जाये, तो $2^{20} - 1$ तक की 'गिनती' गिन सकते हैं; यह दस लाख से बड़ी संख्या होगी। यदि 64 त्रिगरों की श्रृंखला बनायी जाये, तो उनकी सहायता से विख्यात 'शतरंजी संख्याएं' लिखी जा सकती हैं।

एक सेकेंड में दस लाख संकेत गिनने की संभावना प्रायोगिक कार्यों

के लिये बहुत ही महत्त्वपूर्ण है, विशेषकर नाभिकीय भौतिकी में। उदाहरणार्थ, परमाणु-क्षय में निकलने वाली भिन्न प्रकार की कणिकाओं की गिनती की जा सकती है।

प्रति सेकेंड 10 000 संक्रियाएं

पते की बात है कि त्रिगर वाले सर्किट संख्याओं के साथ संक्रियाएं संपन्न करने में भी सहायक होते हैं। उदाहरण के लिये देखा जाये कि दो संख्याओं का जोड़ कैसे संपन्न हो सकता है।

चित्र 3

मान लें कि त्रिगरों की तीन शृंखलाएं चित्र 3 की भाँति संलग्न की गयी हैं। त्रिगरों की ऊपरी शृंखला प्रथम योज्य पद लिखने के लिये है और दूसरी (मध्य) शृंखला द्वितीय योज्य पद लिखने के लिये है। तीसरी (निचली) शृंखला से योगफल प्राप्त होगा। उपकरण चालू करते ही निचली शृंखला के त्रिगरों में ऊपरी और मध्य शृंखलाओं के उन त्रिगरों से स्पंद आते हैं, जो स्थिति-1 में होते हैं।

अब, उदाहरण के लिये, मान लें कि चित्र 3 की भाँति ऊपरी तथा मध्य श्रृंखलाओं में योज्य पद 101 और 111 (द्विभू प्रणाली में) लिखे गये हैं। तब निचली श्रृंखला के प्रथम (धुर दायें) त्रिगर में उपकरण चालू करने के क्षण दो स्पंद आते हैं – ऊपरी और मध्य श्रृंखलाओं के प्रथम त्रिगरों से। हम जान चुके हैं कि दो स्पंद प्राप्त करने के फलस्वरूप निचली श्रृंखला का प्रथम त्रिगर स्थिति-0 में आ जायेगा, लेकिन साथ ही इसी श्रृंखला के दूसरे त्रिगर को जवाबी स्पंद भी भेज देगा। इसके अतिरिक्त, दूसरे त्रिगर में दूसरे योज्य पद से भी एक स्पंद आयेगा, जिसके फलस्वरूप दूसरा त्रिगर भी स्थिति-0 प्राप्त कर लेगा और साथ ही तीसरे त्रिगर को एक जवाबी स्पंद भेजेगा। तीसरे त्रिगर में इसके अतिरिक्त दो और स्पंद आते हैं (प्रत्येक योज्य पद से एक-एक)। तीन स्पंद प्राप्त करने के फलस्वरूप तीसरा त्रिगर स्थिति-1 में आ जायेगा और जवाबी स्पंद भेज देगा। यह जवाबी स्पंद चौथे त्रिगर को स्थिति-1 में ला देगा (चौथे त्रिगर में कोई अन्य संकेत नहीं आता)। इस प्रकार, चित्र 3 में दर्शित उपकरण ऊपर-नीचे (स्तंभ रूप में) लिखी गयी दो संख्याओं को गिनती की द्विभू प्रणाली में जोड़ता है:

$$\begin{array}{r} 101 \\ +\ 111 \\ \hline 1\,100 \end{array}$$

या दशमलव प्रणाली में: $5+7=12$। निचली श्रृंखला में त्रिगरों के जवाबी स्पंदों का अर्थ है कि उपकरण इकाई को 'हाथ में' (या मन में') रखता है और फिर उसे अगली (उच्च) श्रेणी में पहुँचा देता है। संख्याओं को ऊपर-नीचे लिखकर जोड़ते वक्त हम भी यही करते हैं।

यदि हर श्रृंखला में 4 नहीं, 20 त्रिगर होते, तो दस लाख तक की संख्याओं को जोड़ा जा सकता था। अधिक संख्या में त्रिगर लेने पर अधिक बड़ी संख्याएं जोड़ी जा सकती हैं।

अब यह बता दें कि जोड़ संपन्न करने वाले उपकरण का सर्किट वास्तविकता में चित्र 3 के उपकरण से कुछ अधिक जटिल होता है। खासकर उपकरण में ऐसी प्रयुक्ति होनी चाहिये, जो संकेत को देर से पहुँचने को बाध्य कर सके। उपरोक्त सर्किट वाले उपकरण में दोनों योज्य पदों के संकेत निचली श्रृंखला के प्रथम त्रिगर में एक साथ पहुँचते हैं (उपकरण चालू करने के क्षण)। फल होगा कि दोनों संकेत घुल-मिल जायेंगे और त्रिगर उन्हें एक अकेले संकेत के रूप में ग्रहण करेगा। ऐसा न हो, इसके लिये जरूरी है कि योज्य पदों के संकेत एक साथ नहीं, बल्कि आगे-पीछे पहुँचें (अर्थात् एक संकेत कुछ देर से पहुँचे)। इस 'देरी' के कारण दो संख्याओं को जोड़ने में कुछ अधिक समय लगेगा, बनिस्बत कि त्रिगर में एक संकेत के अभिलेखन में।

सर्किट बदलकर उपकरण से जोड़ की जगह घटाव का काम भी लिया जा सकता है। उससे गुणा भी करवाया जा सकता है (यह एक ही संख्या को स्वयं से नियत संख्या बार जोड़ने की क्रिया है और इसमें जोड़ की अपेक्षा कई गुना अधिक समय लगता है)। भाग तथा अन्य संक्रियाएं भी संपन्न करायी जा सकती हैं।

उपरोक्त प्रकार की प्रयुक्तियां आधुनिक कलनक मशीनों में काम आती हैं। ये मशीनें एक सेकेंड में सैकड़ों तो क्या, हजारों संक्रियाएं भी संपन्न कर सकती हैं। ऐसी मशीनें भी बनी हैं, जो एक सेकेंड में दस लाख संक्रियाएं संपन्न कर सकती हैं। आप कहेंगे कि संक्रिया संपन्न करने के लिये इतना सर चकराने वाली रफ्तार की जरूरत ही क्या है! उदाहरणार्थ, क्या फर्क पड़ता है कि मशीन 15-अंकी

संख्या का वर्ग कितने समय में प्राप्त करती है: सेकेंड के सहस्रांश में, या चौथाई सेकेंड में? हमारे लिये दोनों ही 'क्षणिक' हल होंगे...

पर निर्णय लेने में जल्दबाजी न करें। एक उदाहरण लेते हैं। शतरंज का खिलाड़ी चाल चलने के पहले दसियों और यहां तक कि सैकड़ों संभव पर्यायों का विश्लेषण करता है। यदि एक चाल के विश्लेषण में मान लें कि कुछ सेकेंड भर लगते हैं, तो सैकड़ों पर्यायों के विश्लेषण में दसियों मिनट की जरूरत पड़ सकती है। अक्सर ऐसा होता है कि जटिल पार्टियों में खिलाड़ी के पास समय बहुत कम रह जाता है, अर्थात् वे जल्दी-जल्दी चालें चलने को बाध्य हो जाते हैं, क्योंकि वे अपना अधिकांश समय इसके पहले की चालें सोचने में खर्च कर चुके होते हैं। और यदि शतरंज के खेल में पर्यायों का विश्लेषण मशीन को सौंप दिया जाये तो? एक सेकेंड में हजारों कलन करने की क्षमता के कारण मशीन 'पलक मारते' सभी पर्यायों का निरीक्षण कर लेगी; उसे समय की कमी कभी भी नहीं पड़ेगी...

आप बेशक विरोध करेंगे कि कलन करना (चाहे वे लाख जटिल हों) एक बात है और शतरंज खेलना दूसरी बात है। मशीन यह काम नहीं कर सकती। शतरंज का खिलाड़ी पर्यायों का निरीक्षण करते वक्त जोड़-घटाव नहीं करता, वह सोचता है! बहस नहीं करेंगे: इस प्रश्न पर हम नीचे विचार करेंगे।

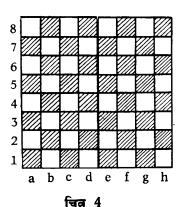
शतरंज की संभव पार्टियों की संख्या

कितने भिन्न प्रकार से शतरंज की चालें चली जा सकती हैं, इसकी संख्या सन्निकट रूप से निर्धारित करते हैं। सही-सही हिसाब लगाना कल्पनातीत काम है, लेकिन शतरंज की सभी संभव पार्टियों की संख्या के सन्निकट मूल्यांकन से हम पाठक का एक परिचय करा सकते

हैं। बेल्जियम के गणितज्ञ क्राइचिक की पुस्तक "गणितीय खेल और मनोरंजन" में इस तरह से हिसाब लगाया गया है:

"सफेद पहली चाल 20 चालों में से चुन सकता है (आठ पैदलों से 16 चालें संभव हैं, क्योंकि हर पैदल एक या दो घर आगे बढ़ सकता है, इसके अतिरिक्त वह दोनों में से प्रत्येक घोड़े की दो चालों में से कोई एक चल सकता है)। सफेद की हर चाल के जवाब में काला भी 20 चालों में से कोई एक चल सकता है। सफेद की हर चाल के साथ काले की हर चाल मिलायी जाये, तो दोनों तरफ से एक-एक चाल चल चुकने पर $20 \cdot 20 = 400$ भिन्न पार्टियां मिलेंगी।

पहली चाल के बाद संभावित चालों की संख्या बढ़ जाती है। उदाहरण के लिये, यदि सफेद ने पहली चाल $e2—e4$ चली है, तो दूसरी चाल के लिये उसके पास चुनने के लिये 29 चालें हो जाती हैं। (अभिलेख $e2—e4$ का मतलब है कि स्तंभ e और कतार 2 के कटान पर स्थित घर से गोटी चली है स्तंभ e और कतार 4 के कटान पर स्थित घर की ओर; दे. चित्र 4)।

चित्र 4

आगे चलकर चालों की संख्या और भी तेजी से बढ़ती है। घर $d5$ पर स्थित फर्जी ही चालों के 27 पर्याय रखता है (यदि यह मान लें कि जहां वह जा सकता है, वे घर खाली हैं)। पर हिसाब आसान करने के लिये निम्न संख्याओं को औसत मान लेते हैं:

पहली चाल में दोनों के लिये बीस-बीस पर्याय हैं;

प्रत्येक अगली चाल में दोनों के लिये तीस-तीस पर्याय हैं।

यह भी मान लेते हैं कि एक पार्टी (शुरू से अंत तक के एक खेल) में 40 चालें चली जाती हैं। तब सभी पार्टियों की कुल संख्या निम्न व्यंजन द्वारा व्यक्त होगी:

$$(20 \cdot 20)^5 \cdot (30 \cdot 30)^{35}.$$

यह कौनसी संख्या है, यह सन्निकट रूप से निधारित करने के लिये निम्न रूपांतरण और सरलीकरण करते हैं:

$$(20 \cdot 20)^5 \cdot (30 \cdot 30)^{35} = 20^{10} \cdot 30^{70} = 2^{10} \cdot 3^{70} \cdot 10^{80}.$$

2^{10} की जगह इसके निकट की संख्या 1 000, अथात् 10^3 लेते हैं।

व्यंजन 3^{70} को निम्न रूप में व्यक्त करते हैं (यह मानकर कि $3^2 \approx 10$ और $3^4 \approx 80$ है):

$$3^{70} = 3^{68} \cdot 3^2 \approx 10(3^4)^{17} \approx 10 \cdot 80^{17} = 10 \cdot 8^{17} \cdot 10^{17} = 2^{51} \cdot 10^{18} =$$
$$= 2(2^{10})^5 \cdot 10^{18} \approx 2 \cdot 10^{15} \cdot 10^{18} = 2 \cdot 10^{33}.$$

अत:

$$(20 \cdot 20)^5 \cdot (30 \cdot 30)^{35} \approx 10^3 \cdot 2 \cdot 10^{33} \cdot 10^{80} = 2 \cdot 10^{116}.$$

यह शतरंज के आविष्कार के लिये पुरस्कार-स्वरूप मांगे गये गेहूँ के दानों की विराट संख्या से भी बहुत ज्यादा है (आविष्कारक ने

शतरंज के 64 घरों में से पहले घर के लिये एक दाना, दूसरे के लिये दो, तीसरे के लिये चार, चौथे के लिये आठ, आदि दाने मांगे थे, दानों की कुल संख्या $2^{64}-1 \approx 18 \cdot 10^{18}$ होती थी)। यदि दुनिया के सभी लोग दिन-रात शतरंज ही खेलते रहें और एक चाल में सिर्फ एक सेकेंड लगे, तो सभी भिन्न पार्टियों को पूरा करने में 10^{100} शतियां बीत जायेंगी।

शतरंज खेलने वाली मशीन

आपको शायद यह जानकर आश्चर्य होगा कि एक समय शतरंज खेलने वाली मशीन भी थी। इसे कैसे संभव माना जाये, यदि शतरंज में गोटियों के विभिन्न मिलापों की संख्या व्यवहारतः अनंत है?

इसका रहस्य बहुत सरल है। शतरंजी मशीन नहीं थी, इसमें सिर्फ विश्वास था। इतिहास में एक मशीन को विशेष लोकप्रियता मिली थी, जिसके रचेता थे हंगेरियन यंत्रकार वोल्फगांग फोन केंपेलेन (1734—1804)। उन्होंने अपनी मशीन आस्ट्रिया और रूस के राजदरबारों में दिखायी, फिर पेरिस और लंदन में सार्वजनिक प्रदर्शनी आयोजित की। इस मशीन के साथ नेपोलियन-I भी खेले थे; उन्हें पूरा विश्वास था कि वे मशीन के साथ ही खेल रहे हैं। पिछली शती के मध्य में मशीन अमेरिका पहुँची, जहां फिलाडेल्फिया में आग लगने से उसका अंत हो गया।

शतरंज खेलने वाली अन्य स्वचल मशीनें थीं, पर उन्हें इतना यश नहीं मिला था। फिर भी इस तरह की स्वचल रूप से काम करने वाली मशीनों में लोगों का विश्वास आगे चलकर भी कम नहीं हुआ।

वास्तविकता में एक भी मशीन खुद शतरंज नहीं खेलती थी। भीतर एक जीता-जागता खिलाड़ी छिपा रहता था, जो गोटियां चलाता था। यह मिथ्या स्वचल मशीन एक बहुत बड़े डिब्बे के आकार की

होती थी, जो तरह-तरह के कल-पुर्जों से भरा रहता था। डिब्बे पर शतरंज बिछा होता था, एक पुतले का हाथ गोटियां चला करता था। खेल के आरंभ में लोगों को यह देखने का मौका दिया जाता था कि डिब्बे के भीतर कल-पुर्जों को छोड़कर और कुछ नहीं है। फिर भी डिब्बे में नाटे कद के आदमी के लिये काफी जगह रहती थी (इस आदमी की भूमिका योगान आलगेयर और विलियम ल्यूइस जैसे विख्यात खिलाड़ी निभाया करते थे)। संभव है कि जब लोगों को डब्बे का एक भाग खोलकर दिखाया जाता था, भीतर छिपा हुआ आदमी बिना शोर-शराबे के दूसरे भाग में खिसक जाता था। कल-पुर्जे 'मशीन' के काम में कोई हिस्सा नहीं लेते थे, वे सिर्फ दिखाने और खिलाड़ी को छिपाने के लिये होते थे।

ऊपर जो कलन दिखाये गये हैं, उनसे सिर्फ एक निष्कर्ष निकल सकता है: शतरंज की भिन्न पार्टियों की संख्या व्यवहारत: अनंत है और स्वचल रूप से सबसे सही चाल ढूँढ़ने वाली मशीन के अस्तित्व में सिर्फ सीधे-सादे लोग ही विश्वास कर सकते हैं। इसीलिये शतरंज के खेल पर संकट कभी नहीं आयेगा।

लेकिन पिछले वर्षों से कुछ ऐसी घटनाएं सामने आयी हैं, जो इस निष्कर्ष को संदेहमय बना हैं। शतरंज खेलने वाली मशीनें बन चुकी हैं। ये जटिल कलनक मशीनें हैं, जो प्रति सेकेंड हजारों संक्रियाएं संपन्न कर लेती हैं। ऐसी मशीनों के बारे में ऊपर बताया जा चुका है। लेकिन मशीन शतरंज कैसे खेल सकती है?

मशीन तो संख्याओं के साथ संक्रियाओं के अतिरिक्त और कुछ भी नहीं कर सकती। लेकिन कलन संक्रियाओं के एक निश्चित आरेख, एक निश्चित प्रोग्राम के अनुसार संपन्न होते हैं, जिसे पहले से बनाया जाता है।

गणितज्ञ शतरंज का प्रोग्राम इस खेल की निश्चित कार्यनीति के

ग्राधार पर बनाते हैं। कार्यनीति का अर्थ है नियमों का एक तंत्र (जाल), जिसका अनुसरण करते हुए एकमात्र (इस कार्यनीति की दृष्टि से श्रेष्ठ) चाल ज्ञात कर सकते हैं। ऐसी कार्यनीति का एक उदाहरण प्रस्तुत करते हैं। हर गोटी का मूल्य अंकों में आँका जाता है:

राजा	+200 अंक	प्यादा	+1 अंक
फर्जी	+9 अंक	पिछड़ा प्यादा	—0.5 अंक
किश्ती	+5 अंक	अकेला प्यादा	—0.5 अंक
हाथी	+3 अंक	आगे-पीछे खड़े	—0.5 अंक
घोड़ा	+3 अंक	दो प्यादे	

इसके अतिरिक्त, गोटियों के व्यूह (पारस्परिक स्थिति और पारस्परिक क्रिया) का भी मूल्यांकन होता है, जैसे गोटी को चलने के लिये कितने स्थान हैं, केन्द्र में है या बिल्कुल किनारे। ये मूल्यांकन दशांशों में होते हैं। सफेद गोटियों के सारे अंक जोड़कर देखते हैं कि वह काले के अंकों के योगफल से कितना अंतर रखता है। यह अंतर ही किसी सीमा तक काले की तुलना में सफेद की शक्ति दिखाता है। यदि यह अंतर धनात्मक है, तो सफेद की स्थिति अधिक अच्छी है और यदि ऋणात्मक है, तो काले की स्थिति अधिक अच्छी है।

कलनक मशीन हिसाब लगाती है कि अगले भिन्न प्रकार के तीन चालों से अंकों का अंतर किस तरह बदल सकता है, इसके बाद इनमें से वह श्रेष्ठ तीन चालें चुनती है और कागज पर छाप देती है। इसका

[illegible] है कि मशीन अपनी चाल चल चुकी है[1]। एक चाल चलने में मशीन को बहुत कम समय लगता है (यह प्रोग्राम के प्रकार और मशीन की गति पर निर्भर करता है), इसलिये मशीन के लिये टाइम-आउट का खतरा नहीं रहता।

आगे की सिर्फ तीन चालें देख सकना निश्चय इस बात का द्योतक है कि मशीन एक काफी कमजोर खिलाड़ी है (अच्छे खिलाड़ी दस-दस चालें देख जाते हैं)। लेकिन इसमें शक नहीं है कि मशीनें जल्द ही और अच्छी तरह से खेलना सीख जायेंगी, क्योंकि कलनक का विकास बहुत तेजी से हो रहा है।

शतरंज का प्रोग्राम बनाने के बारे में अधिक विस्तार से कुछ कह पाना इस पुस्तक में संभव नहीं है, लेकिन चंद सरलतम प्रोग्रामों का आरेख अगले अध्याय में देखेंगे।

तीन दुक्कों से

तीन अंकों से यथासंभव बड़ी संख्या व्यक्त करने की विधि सभी जानते होंगे। इसके लिये तीन नहले निम्न प्रकार से लिखने चाहिये:

---

[1] शतरंज में अन्य प्रकार की कार्यनीतियां भी संभव हैं। यथा, कोई जरूरी नहीं कि प्रतिद्वंदी की हर संभव चाल का विश्लेषण किया जाये, उसकी सिर्फ शक्तिशाली चालों को देखने से भी काम चल सकता है (जैसे प्रतिद्वंदी की तरफ से शह, आक्रमण, सुरक्षा आदि की चालें)। यदि प्रतिद्वंदी की सिर्फ विशेष रूप से सशक्त चालें ही देखी जायें, तो अगली तीन ही नहीं, कई चालों का विश्लेषण किया जा सकता है। गोटियों के मूल्यांकन के लिये भी किसी अन्य पैमाने का उपयोग संभव है। मशीन के 'खेल की शैली' कार्यनीति के चयन पर ही निर्भर करती है।

$$9^{9^9}$$

अर्थात् 9 का तीसरा 'पराघात' लिखना चाहिये।

यह संख्या इतनी विराट है कि कोई तुलना नहीं हो सकती। ब्रह्मांड में एलेक्ट्रोनों की कुल संख्या भी इसका एक क्षुद्रांश ही होगी। मेरी पुस्तक 'सरस गणित' (अध्याय 10) में इसके बारे में बताया जा चुका है। इसे फिर से दुहरा रहा हूँ सिर्फ इसलिये कि आपके सामने इसी तरह का एक अन्य प्रश्न रखना चाहता हूँ:

संक्रिया-चिन्हों का उपयोग किये बगैर तीन दुक्कों की सहायता से संभावित महत्तम संख्या लिखें।

हल

नहलों की तिमंजिली स्थिति देखकर आप शायद दुक्कों को भी उसी स्थिति में अंकित करने जा रहे हैं:

$$2^{2^2}$$

लेकिन इससे प्रत्याशित प्रभाव नहीं उत्पन्न होता है। इससे एक बहुत ही छोटी संख्या लिखी गयी है – यहां तक कि 222 से भी छोटी। वास्तविकता में हमने सिर्फ 2^4 अर्थात् 16 ही लिखा है।

तीन दुक्कों से लिखी जा सकने वाली महत्तम संख्या न 222 है, न 22^2 (अर्थात् 484) ही है। यह है

$$2^{22} = 4\,194\,304.$$

उदाहरण बड़ा ही शिक्षाप्रद है। वह दिखाता है कि गणित में देखी-देखी नहीं करनी चाहिये; इसमें सादृश्य से गलत निष्कर्ष भी मिल सकते हैं।

तीन तिक्कों से

अगला प्रश्न शायद आप सावधानी से सोचसमझ कर हल करेंगे।

प्रश्न

संक्रिया-चिन्हों का उपयोग किये बगैर तीन तिक्कों से यथासंभव बड़ी संख्या लिखें।

हल

तिमंजिला रूप यहां भी कारगर नहीं होगा, क्योंकि

3^{3^3} अर्थात् 3^{27} कम है 3^{33} से।

अंतिम रूप ही उत्तर है।

तीन चौओं से

प्रश्न

संक्रिया-चिन्हों के बिना सिर्फ तीन चौओं की मदद से यथासंभव बडी संख्या लिखें।]

हल

यदि इसका हल आप पिछले दो प्रश्नों की तरह ढूढ़ेंगे, अर्थात् यदि आप निम्न उत्तर देंगे :

$$4^{44}$$

तो आप गलत होंगे, क्योंकि इस बार तिमंजिला रूप

$$4^{4^4}$$

ही इष्ट है, क्योंकि इसमें $4^4 = 256$ है और 4^{256} निश्चय ही 4^{44} से बड़ा है।

तीन समान अंकों से

तीन समान अंकों को तिमंजिला रूप में लिखने पर कभी यथा संभव बड़ी संख्या मिल जाती है, तो कभी – नहीं। इस चकराने वाली बात को समझने के लिये प्रश्न को कुछ गहराई से व्यापक रूप में देखें :

संक्रिया-चिन्हों का उपयोग किये बगैर तीन समान अंकों से यथा-संभव बड़ी संख्या लिखें।

अंक को a से द्योतित करें। रूप

$$2^{22},\ 3^{33},\ 4^{44}$$

की तरह a को तीन बार लिखने पर

$$a^{10a+a}, \text{ अर्थात् } a^{11a}$$

मिलेगा। तिमंजिला रूप देने पर मिलेगा :

$$a^{a^a}.$$

अब निर्धारित करते हैं कि किन परिस्थितियों में पिछला रूप अधिक बड़ी संख्या व्यक्त करेगा और किन परिस्थितियों में – तिमंजिला रूप। चूँकि दोनों ही व्यंजनों में घात का आधार समान है, इसलिये

वही व्यंजन बड़ी संख्या व्यक्त करेगा, जिसके घात का सूचकांक बड़ा होगा। अतः हमारा प्रश्न है:

$$a^a > 11a$$

कब होगा?

दोनों पक्षों में a से भाग देते हैं। प्राप्त होगा:

$$a^{a-1} > 11.$$

आप सरलतापूर्वक देख सकते हैं कि a^{a-1} तभी 11 से अधिक होगा, जब a का मान 3 से अधिक होगा, क्योंकि

$$4^{4-1} > 11,$$

जबकि घात 3^2 और 2^1 संख्या 11 से कम हैं।

अब पिछले प्रश्नों की विचित्रता समझ में आ जाती है: दुक्कों और तिक्कों को एक रूप में लिखना है और चौओं या इससे बड़े मान वाले किन्हीं अंकों को दूसरे रूप में लिखना पड़ता है।

चार इकाइयों से

प्रश्न

बिना किसी गणितीय संक्रिया का उपयोग किये, चार इकाइयों की सहायता से यथासंभव महत्तम संख्या लिखें

हल

मन में सबसे पहले संख्या 1111 आती है, पर यह प्रश्न की मांग पूरी नहीं करती, क्योंकि घात

संख्या 1111 से कई गुना अधिक है। 11 को दस बार गुणा करके यह संख्या प्राप्त करने का धीरज शायद ही किसी में होगा, पर लघुगणकी सारणी की सहायता से हम इसका मूल्यांकन जल्द कर सकते हैं।

यह संख्या 285 अरब से भी अधिक है, अर्थात् 1111 की तुलना में 250 लाख गुना से भी ज्यादा है।

चार दुक्कों से

प्रश्न

इस प्रकार का प्रश्न विकसित करने में एक और कदम उठाते हैं, चार दुक्कों के लिये प्रश्न रखते हैं:

चार दुक्कों को किस तरह लिखने पर वे महत्तम संख्या व्यक्त करेंगे?

हल

आठ संभव रूप हैं:

$$2222,\ 222^2,\ 22^{22},\ 2^{222},$$
$$22^{2^2},\ 2^{22^2},\ 2^{2^{22}},\ 2^{2^{2^2}}.$$

इनमें से कौनसी संख्या बड़ी है?

पहले ऊपरी, अर्थात् दुमंजिला रूप देखते हैं।

पहला रूप – 2222 – बाकी तीनों से कम है, यह बिल्कुल स्पष्ट है। अब निम्न दो की तुलना करते हैं:

$$222^2 \text{ और } 22^{22}.$$

दूसरे का निम्न रूपांतरण करें:

$$22^{22}=22^{2\cdot 11}=(22^2)^{11}=484^{11}.$$

अंतिम संख्या 222^2 से बड़ी है, क्योंकि घात 484^{11} में घात का आधार और सूचक दोनों ही बड़े हैं, बनिस्बत कि 222^2 में।

अब 22^{22} की तुलना प्रथम पंक्ति के अंतिम व्यंजन – 2^{222} – से करते हैं। 22^{22} की जगह इससे बड़ी संख्या 32^{22} लेते हैं और दिखाते हैं कि यह भी कम ही है यदि इसकी तुलना 2^{222} से करें।

सचमुच ही,

$$32^{22}=(2^5)^{22}=2^{110},$$

और यह घात कम है, बनिस्बत कि 2^{222} ।

अब पाँच संख्याओं की तुलना करनी है – अभी-अभी प्राप्त संख्या को और निम्न चार संख्याओं की:

$$22^{2^2},\ 22^{22^2},\ 2^{2^{22}},\ 2^{2^{2^2}}.$$

अंतिम संख्या का मान सिर्फ 2^{16} है। अतः प्रतियोगिता में वह तुरंत पीछे हट जाती है। आगे, इस पंक्ति में पहली संख्या का मान 22^4 के बराबर है, जो 32^4 (अर्थात् 2^{20}) से छोटा होने के कारण बाकी दोनों से भी छोटा है। अतः अब तीन संख्याओं की तुलना करनी है, जो संख्या 2 के घात हैं। स्पष्ट है कि 2 के घातों में से बड़ा वही होगा, जिसका घात बड़ा होगा। लेकिन तीनों सूचकों

$$222,\ \ 484 \text{ और } 2^{20+2}(=2^{10\cdot 2}\cdot 2^2\approx 10^6\cdot 4)$$

में से अंतिम सूचक निश्चय ही सबसे बड़ा है।

इसलिये चार दुक्कों से जो सबसे बड़ी संख्या लिखी जा सकती है, वह इस प्रकार की है:

$2^{2^{22}}$

इस संख्या के मान का अंदाज लगरथी सारणियों के बगैर ही लगाया जा सकता है ; इसके लिये निम्न समीपवर्ती समिका का उपयोग करना होगा :

$$2^{10} \approx 1\,000.$$

सचमुच ही,

$$2^{22} = 2^{20} \cdot 2^{2} \approx 4 \cdot 10^{6},$$

$$2^{2^{22}} \approx 2^{4000000} > 10^{1200000}$$

निष्कर्ष : इस संख्या में 12 लाख से अधिक अंक हैं।

अध्याय 2.

बीजगणित की भाषा

समीकरण रचने की कला

बीजगणित की भाषा है—समीकरण। "संख्याओं से या राशियों के अमूर्त्त नातों से संबंधित प्रश्न हल करने के पहले उसे अपनी मातृ-भाषा से बीजगणित की भाषा में रूपांतरित करना चाहिये,"—यह महान न्यूटन ने बीजगणित की 'सर्वसामान्य अंकगणित' नामक अपनी पाठ्य-पुस्तक में लिखा था। मातृभाषा से बीजगणित की भाषा में अनुवाद कैसे होता है, यह न्यूटन ने उदाहरणों से समझाया था। उनका एक उदाहरण निम्न है:

मातृभाषा में	बीजगणित की भाषा में
सौदागर के पास एक धन-राशि थी।	x
प्रथम वर्ष उसने 100 पौंड खर्च कर दिये।	$x-100$
शेष में उसका तीसरा भाग और मिला दिया।	$(x-100)+\frac{x-100}{3}=\frac{4x-400}{3}$

मातृभाषा में	बीजगणित की भाषा में
अगले वर्ष उसने फिर 100 पौंड खर्च कर दिये।	$\frac{4x-400}{3}-100=\frac{4x-700}{3}$
और शेष में उसका तीसरा भाग मिला दिया।	$\frac{4x-700}{3}+\frac{4x-700}{9}=\frac{16x-2800}{9}$
तीसरे वर्ष उसने फिर 100 पौंड खर्च कर दिये।	$\frac{16x-2800}{9}-100=\frac{16x-3700}{9}$
शेष में उसका तीसरा भाग मिलाने के बाद	$\frac{16x-3700}{9}+\frac{16x-3700}{27}=\frac{64x-14800}{27}$
उसकी पूँजी आरंभिक राशि से दुगुनी हो गयी।	$\frac{64x-14800}{27}=2x$

(उत्तर : $x=1480$ पौंड)

सौदागर की आरंभिक धन-राशि ज्ञात करने के लिये बस अंतिम समीकरण हल करने की जरूरत है।

समीकरण हल करना अक्सर बहुत सरल होता है, पर प्रश्न में दी गयी शर्तों के आधार पर समीकरण गढ़ना अधिक कठिन होता है। अभी-अभी आपने देखा है कि समीकरण रचने की कला दरअसल 'मातृभाषा से बीजगणितीय भाषा में' अनुवाद करने की ही कला है। लेकिन बीजगणित की भाषा में शब्द अधिक नहीं हैं, इसलिये उसमें मातृभाषा का हर मुहावरा आसानी से अनूदित नहीं हो पाता।

अनुवाद में कठिनाइयों की कई कोटियां हैं, यह पाठकवृंद प्रथमघाती समीकरण रचने के चंद उदाहरणों से स्वयं देख ले सकते हैं।

देओफांत का जीवन

प्रश्न

प्राचीन प्रतिभावान गणितज्ञ देओफांत की जीवनी के बारे में हम बहुत कम जानते हैं। जो कुछ हमें ज्ञात है, वह उनकी कब्र पर खुदे हुए एक गणितीय प्रश्न से है, जिसे हम नीचे दे रहे हैं।

मातृभाषा में	बीजगणित की भाषा में
यात्री, यहां समाधि है देओफांत की। संख्याओं का चमत्कार बतायेगा, कितनी उम्र थी उनकी।	x
छठा भाग सुहाना बचपन था।	$x/6$
बारहवां भाग और गुजरा — भीग आयीं मसें,	$x/12$

मातृभाषा में	बीजगणित की भाषा में
सातवां बीता – निस्संतान दांपत्य में।	$x/7$
पाँच वर्ष और बीते, मुख देखे प्रथम पुत्र के,	5
जिसे भगवान ने उम्र दी बस पिता की आधी।	$\frac{x}{2}$
और गहन शोक में बूढ़ा भाग्य का मारा इहलोक में चार वर्ष और जीकर विदा लिया उस लोक में।	$x=\frac{x}{6}+\frac{x}{12}+\frac{x}{7}+5+\frac{x}{2}+4$
बता, कितना जीकर देओफांत स्वीकारा मृत्यु, अपना देहांत!	

हल

समीकरण हल करने पर $x=84$ प्राप्त होता है, जिससे हमें देओफांत के जीवन संबंधी निम्न तथ्य ज्ञात होते हैं: उनकी शादी 21 वर्ष में हुई थी, 38 वर्ष में वे पिता बने, 80 वर्ष की उम्र में पुत्र खोया, 84 में मृत्यु को प्राप्त हुए।

घोड़ा और गधा

प्रश्न

एक और पुराना प्रश्न प्रस्तुत है, जिसका मातृभाषा से बीजगणित की भाषा में सरलतापूर्वक अनुवाद किया जा सकता है।

"एक घोड़ा और एक गधा पीठ पर बोरियां लादे हुए साथ-साथ चल रहे थे। घोड़ा रो रहा था कि उसपर बहुत भारी बोझ है। 'तू क्यों रोता है? – गधे ने जवाब दिया। – यदि मैं तुम्हारी एक बोरी ले लूँ, तो मेरा बोझ तुमसे दुगुना हो जायेगा। लेकिन यदि तुम मेरी एक बोरी ले लेते, तो तुम्हारा बोझ मेरे बराबर हो जाता।'

बताएं, चतुर गणितज्ञ, कितनी बोरियां घोड़ा ढो रहा था और कितनी – गधा!"

हल

यदि मैं तुम्हारी एक बोरी ले लूँ,	$x-1$
तो मेरा बोझ	$y+1$
तुमसे दुगुना हो जायेगा	$y+1=2(x-1)$
लेकिन यदि तुम मेरी एक बोरी ले लेते,	$y-1$
तो तुम्हारा बोझ	$x+1$
मेरे बराबर हो जाता	$y-1=x+1$

हमने प्रश्न को दो अज्ञात राशियों वाले समीकरण-तंत्र के रूप में परिणत कर दिया है:

$$\left.\begin{array}{l} y+1=2(x-1) \\ y-1=x+1 \end{array}\right\} \text{ या } \quad \left\{\begin{array}{l} 2x-y=3 \\ y-x=2. \end{array}\right.$$

हल करने पर $x=5$, $y=7$ मिलता है। घोड़ा 5 बोरियां ढो रहा था और गधा – पूरी 7 बोरियां।

चार भाई

प्रश्न

चार भाइयों के पास कुल 45 रूबल थे। यदि पहले भाई की राशि में 2 रूबल जोड़ दिया जाये और दूसरे की राशि से 2 रूबल घटा लिया जाये, साथ ही तीसरे की राशि दुगुनी कर दी जाये और चौथे की राशि आधी कर दी जाये, तो चारों के पास बराबर राशियां हो जायेंगी। प्रत्येक के पास कितना धन था?

हल

चार भाइयों के पास 45 रूबल थे।	$x+y+z+t=45$
यदि पहले भाई की राशि में 2 रूबल जोड़ दिया जाये,	$x+2$
और दूसरे की राशि से 2 रूबल घटा लिया जाये,	$y-2$

साथ ही तीसरे की राशि दुगुनी कर दी जाये	$2z$
और चौथे की राशि आधी कर दी जाये	$\frac{t}{2}$
तो चारों के पास बराबर राशियां हो जायेंगी	$x+2=y-2=2z=\frac{t}{2}$

आखिरी समीकरण को तीन समीकरणों में तोड़ लेते हैं:

$$x+2=y-2,$$
$$x+2=2z$$
$$x+2=\frac{t}{2}.$$

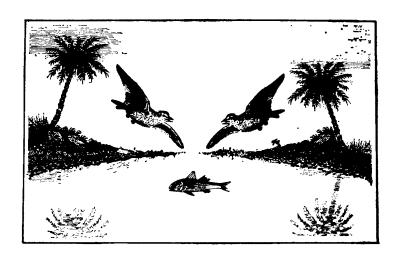
इससे

$$y=x+4,$$
$$z=\frac{x+2}{2},$$
$$t=2x+4.$$

ये मान प्रथम समीकरण में रखने पर मिलेगा:

$$x+x+4+\frac{x+2}{2}+2x+4=45,$$

जिससे $x=8$ है। आगे: $y=12$, $z=5$, $t=20$ मिलता है। अतः भाइयों के पास थे क्रमशः–

8 रूबल, 12 रूबल, 5 रूबल, 20 रूबल।

चित्र 5

नदी पर चिड़ियां

प्रश्न

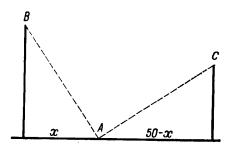
11-वीं शती के एक अरबी गणितज्ञ के पास इस तरह का एक प्रश्न था:

नदी के तटों पर आमने-सामने खजूर के एक-एक वृक्ष हैं। एक की ऊँचाई 30 हाथ है, दूसरे की 20 हाथ। उनके आधारों की आपसी दूरी 50 हाथ है। दोनों की चोटी पर एक-एक चिड़िया बैठी है। अचानक दोनों वृक्षों के बीच नदी की सतह पर एक मछली दिखी। दोनों चिड़ियां एक ही साथ समान वेग से झपटीं और एक ही साथ मछली को जा पकड़ी।

अधिक ऊँचे खजूर के आधार से किस दूरी पर मछली दिखी थी ?

हल

चित्र 6 में दिये गये आरेख में पिथागोरस के साध्य से निर्धारित करते हैं :

$$AB^2 = 30^2 + x^2, \quad AC^2 = 20^2 + (50 - x)^2.$$

चित्र 6

लेकिन $AB = AC$ है, क्योंकि इन दूरियों को दोनों चिड़ियों ने एक ही समय में तय किया है :

$$30^2 + x^2 = 20^2 + (50 - x)^2.$$

कोष्ठक खोलकर आवश्यक सरलीकरण के बाद प्रथम घात का समीकरण प्राप्त करते हैं :

$$100x = 2000,$$

जिससे $x = 20$ हाथ ।

मछली खजूर के 30 हाथ ऊँचे वृक्ष के आधार से 20 हाथ की दूरी पर निकली थी।

सैर

प्रश्न

–कल दिन में मेरी ओर आ जायें,–बूढ़े डाक्टर ने अपने एक परिचित से कहा।

–धन्यवाद। मैं तीन बजे निकलूंगा। यदि आपकी भी टहलने की इच्छा हो, तो आप भी इसी समय घर से निकलें। बीच में मिल लेंगे।

–लेकिन आप भूल रहे हैं कि मैं बूढ़ा हूँ और एक घंटे में 3km से अधिक नहीं चल सकता। आप जवान आदमी हैं, बहुत धीरे चलेंगे, तो भी एक घंटे में 4km चल लेंगे। मुझे कुछ छूट दे देते, तो अच्छा था।

–ठीक है। चूंकि मैं एक घंटे में आप से 1km अधिक चलता हूँ, इसलिये बराबरी करने के लिये यह एक किलो मीटर मैं आप को दे देता हूँ, अर्थात् मैं चौथाई घंटा पहले निकल जाऊंगा। ठीक रहेगा?

–बहुत दया होगी आपकी ओर से,–डाक्टर तुरंत तैयार हो गये।

जवान ने ऐसा ही किया: वह पौने तीन बजे घर से निकल गया और 4km/h के वेग से चला। डाक्टर ठीक तीन बजे निकले और 3km/h की दर से चले। जब दोनों मिले, तो डाक्टर वापस मुड़ गये और जवान मित्र को अपने घर ले गये।

जवान आदमी जब अपने घर लौटा, सिर्फ तब समझा कि सिर्फ

पंद्रह मिनट की छूट देकर उसे कुल मिलाकर डाक्टर से दुगना नहीं, चौगुना चलना पड़ा है।

डाक्टर के घर से उनके जवान मित्र का घर कितना दूर है?

हल

घरों के बीच की दूरी x (km) से द्योतित करते हैं। जवान आदमी $2x$ चला है और डाक्टर–चार गुना कम, अर्थात $\frac{x}{2}$। मिलने तक डाक्टर $\frac{x}{2}$ का आधा, अर्थात् $\frac{x}{4}$ चला था और जवान आदमी बाकी $\frac{3x}{4}$ चला था। डाक्टर ने अपने हिस्से का पथ $\frac{x}{12}$ घंटे में तय किया और जवान आदमी ने $\frac{3x}{16}$ घंटे में। साथ ही हम यह जानते हैं कि जवान आदमी डाक्टर से $\frac{1}{4}$ घंटा अधिक चला है।

समीकरण हुआ :

$$\frac{3x}{16} - \frac{x}{12} = \frac{1}{4},$$

जिससे $x = 2.4\text{km}$

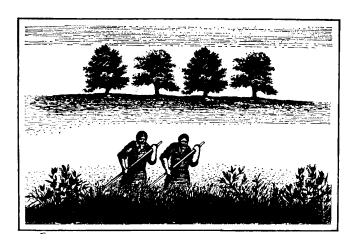
जवान आदमी के घर से डाक्टर का घर 2.4km दूर है।

घसियारे

विख्यात भौतिकविद अ. त्सिंगेर ने ले. तोल्स्तोय के बारे में अपने संस्मरण में एक प्रश्न का वर्णन किया है, जो महान लेखक को बहुत पसंद आया था :

"घसियारों के एक समूह को दो मैदानों से घास काटना था, एक मैदान दूसरे से दुगुना था। आधा दिन तक पूरा समूह बड़े मैदान

में घास काटता रहा। इसके बाद आधा समूह बड़े मैदान में ही काम करता रहा और शाम तक उसकी पूरी कटनी हो गयी; बाकी आधा समूह छोटे मैदान की कटनी करता रहा, जिसमें शाम को इतना काम बच गया, जिसे दिन भर अकेला घसियारा पूरा कर सकता था।

समूह में कितने घसियारे थे?"

चित्र 7

हल

मुख्य अज्ञात राशि—घसियारों की संख्या—को हम x से द्योतित करेंगे। साथ ही हमें एक सहायक अज्ञात राशि की आवश्यकता होगी—एक घसियारा एक दिन में कितने बड़े क्षेत्र से घास काटता है; इसे

हम y मान लेते हैं। इस राशि को ज्ञात करने की आवश्यकता नहीं है, पर यह मुख्य अज्ञात राशि ढूंढ़ने का काम आसान कर देगी।

x तथा y द्वारा बड़े मैदान का क्षेत्रफल व्यक्त करते हैं। इस मैदान को आधे दिन तक x घसियारे काटते रहे हैं; इन्होंने काटा

$$x \cdot \frac{1}{2} \cdot y = \frac{xy}{2}.$$

बाकी आधा दिन सिर्फ आधे समूह, अर्थात् $\frac{x}{2}$ घसियारों ने काटा था; उन्होंने काटा:

$$\frac{x}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot y = \frac{xy}{4}.$$

शाम को यह मैदान पूरा काटा जा चुका था, इसलिये इसका क्षेत्रफल है

$$\frac{xy}{2} + \frac{xy}{4} = \frac{3xy}{4}.$$

अब छोटे मैदान का क्षेत्रफल x तथा y द्वारा व्यक्त करते हैं: इसे आधे दिन तक आधे समूह $\frac{x}{2}$ ने काटा है; इन्होंने काटा

$$\frac{x}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot y = \frac{xy}{4}.$$

इसमें वह टुकड़ा भी जोड़ लें, जिसे एक आदमी ने एक दिन में काटा; यह क्षेत्र y के बराबर है। अतः छोटे मैदान का क्षेत्रफल हुआ:

$$\frac{xy}{4} + y = \frac{xy + 4y}{4}.$$

अब बीजगणितीय भाषा में सिर्फ निम्न वाक्य का अनुवाद कर लीजिये : 'पहला मैदान दूसरे से दुगुना बड़ा था', बस समीकरण तैयार है :

$$\frac{3xy}{4} : \frac{xy+4y}{4} = 2,$$

या

$$\frac{3xy}{xy+4y} = 2.$$

समीकरण के बायें भाग में y काट दे सकते हैं (क्योंकि वह अंश और हर दोनों में ही गुणनखंड के रूप में मौजूद है) ; इस तरह सहायक अज्ञात राशि वहिष्कृत हो जाती है और समीकरण का रूप हो जाता है :

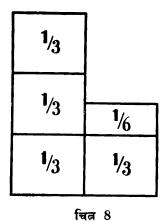
$$\frac{3x}{x+4} = 2, \text{ या } 3x = 2x + 8,$$

जिससे $x = 8$.

घसियारों की संख्या 8 थी।

'मनोरंजक बीजगणित' के प्रथम प्रकाशन के बाद प्रो. त्सिंगेर ने मुझे इस प्रश्न के बारे में विस्तारपूर्वक एक रोचक सूचना लिखकर भेजी। उनके विचारानुसार इस प्रश्न में सबसे मोहक बात यह थी कि "यह बीजगणितीय नहीं, बल्कि अंकगणितीय प्रश्न है और बहुत ही सरल प्रश्न है ; इसे हल करने में यदि कोई कठिनाई है, तो यही कि इसका रूप बिल्कुल अनौपचारिक है"।

"इस प्रश्न का इतिहास निम्न है,–प्रो. त्सिंगेर ने आगे लिखा था।–जिस जमाने में मेरे पिता और चाचा ई. रायेव्स्की (ले. तोल्स्तोय के अंतरंग मित्र) मास्को विश्वविद्यालय के गणित विभाग में पढ़ रहे थे, उस समय शिक्षण जैसा एक विषय भी हुआ करता था। छात्र को नगर के एक विद्यालय में अनुभवी शिक्षकों की **देख**-रेख में पढ़ाने का प्रशिक्षण प्राप्त करना पड़ता था। त्सिंगेर **और राये**-

व्स्की के मित्रों में एक छात्र पेत्रोव भी था, जो एक बहुत ही प्रतिभावान और मौलिक आदमी था (उसकी मृत्यु बहुत कम उम्र में क्षय-रोग के कारण हो गयी थी)। उसका कहना था कि अंकगणित की कक्षा में अनौपचारिक प्रश्नों को औपचारिक विधियों से हल करना सिखा-सिखा कर बच्चों को खराब किया जा रहा है। अपनी बात सिद्ध करने के लिये पेत्रोव खुद प्रश्न रचा करता था, जो अनौपचारिक होने के कारण 'अनुभवी' शिक्षकों के लिये कठिन होता था, पर योग्य छात्र (यदि वे पुरानी पढ़ाई से खराब नहीं हो चुके थे) उन्हें सरलता से हल कर लिया करते थे। पेत्रोव ने कई प्रश्न रचे थे, उपरोक्त प्रश्न इन्हीं में से एक था। अनुभवी शिक्षक इसे समीकरणों की सहायता से जल्द हल कर लेते थे, पर सीधा-सादा अंकगणितीय हल वे नहीं देख पाते थे। लेकिन प्रश्न बहुत ही सरल है और इसके लिये बीजगणितीय उपकरण की कोई आवश्यकता नहीं है।

चित्र 8

यदि बड़े मैदान को आधे दिन तक समूह ने काटा है और आधे

दिन तक सिर्फ आधे समूह ने, तो स्पष्ट है कि आधा समूह आधे दिन में $\frac{1}{3}$ मैदान काटता है। अतः दिन के अंत में छोटे मैदान में बचा था $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$ जिसे अगले दिन में अकेला घसियारा काट लेता है। चूंकि एक घसियारा दिन में $\frac{1}{6}$ भाग काटता है, और पूरी कटनी $\frac{6}{6}+\frac{2}{6}=\frac{8}{6}$ हुई है, तो इसे 8 घसियारों ने मिलकर पूरा किया है।

तोल्स्तोय ऐसे प्रश्न बहुत पसंद करते थे; जिनमें कोई सरल-सी चाल छिपी होती थी। उन्होंने यह प्रश्न मेरे पिता से सुन रखा था। जब इस प्रश्न के बारे में मुझे तोल्स्तोय के साथ बातचीत करने का मौका मिला (वे काफी बूढ़े हो चुके थे), उन्हें बहुत आश्चर्य हुआ कि एक सरल आरेख (चित्र 8) के उपयोग से प्रश्न का हल और भी स्पष्ट हो जाता है।"

नीचे हमें कुछेक और प्रश्न मिलेंगे, जिन्हें थोड़ा अक्ल लड़ाने पर अंकगणितीय विधि से हल करना आसान रहेगा, बनिस्बत कि बीजगणितीय विधि से।

मैदान में गायें

प्रश्न

"विज्ञान के अध्ययन में नियमों की अपेक्षा प्रश्न अधिक सहायक होते हैं,"—यह न्यूटन ने अपने 'सर्वसामान्य अंकगणित' में लिखा था। इसमें उन्होंने सभी सैद्धांतिक निर्देशों को अनेक प्रश्नों के उदाहरणों से समझाया है। इन प्रश्नों के बीच गायों के चरने के बारे में एक प्रश्न

है, जिससे एक विशेष प्रकार के प्रश्नों की शुरूआत हुई है। इनमें से एक निम्न है:

"एक मैदान में घास समसर्वत्र और समान गति से उपजती है। इसे 70 गायें 24 दिन में चर जाती हैं और 30 गायें 60 दिन में। 96 दिन में कितनी गायें मिलकर पूरी घास चर जायेंगी?"

यह प्रश्न चेखोव की एक व्यंग्यकथा 'ट्यूटर' की याद दिलाता है। स्कूली बच्चे को प्रश्न दिया गया है और दो बड़े आदमी उसकी सहायता में जुटे हुए हैं, लेकिन उनके पल्ले कुछ नहीं पड़ रहा है और वे बुरी तरह चकराये हुए हैं:

चित्र 9

—अजीब बात है,—एक कहता है,—यदि सारा मैदान 24 दिन में 70 गायें चर जाती हैं, तो उसे 96 दिन में कितनी गायें

चर जायेंगी? 70 का $\frac{1}{4}$ ही तो, मतलब कि $17\frac{1}{2}$ गाय... यह पहली विसंगति हुई! दूसरी भी है: घास 60 दिन में 30 गायें चर जाती हैं, उसे 96 दिन में कितनी गायें चर जायेंगी? और भी गड़बड़ है: $18\frac{3}{4}$ गाय। इसके अलावा: यदि 70 गायें घास 24 दिन में चरती हैं, तो 30 गायें इसे 56 दिन में चरेंगी, लेकिन प्रश्न के अनुसार 30 गायें इसे 60 दिन में चरती हैं...

—और आपने यह ध्यान में रखा है कि घास पनपती भी तो जाती है?—दूसरे ने पूछा।

टिप्पणी बहुत सार्थक है: घास लगातार पनपती रहती है और इस तथ्य की उपेक्षा करने पर प्रश्न की शर्त्तें ही परस्पर विरोधी लगने लगेंगी, फिर आप हल क्या करेंगे।

कैसे हल होता है यह प्रश्न?

हल

यहां भी एक सहायक अज्ञात राशि का उपयोग करेंगे, जो मैदान में प्रति दिन घास की वृद्धि (घास के पूरे भंडार के अंशों में) व्यक्त करेगी। एक अहर्निश के दौरान पूरी घास में y अंश के बराबर वृद्धि होती है, अतः 24 दिनों में $24y$ की वृद्धि होगी। मैदान में उपस्थित पूरी घास को 1 मान लेने पर 24 दिनों में कुल भंडार होता है

$$1+24y.$$

एक दिन में 70 गायों का झुंड चरता है

$$\frac{1+24y}{24},$$

श्रौर एक दिन में एक गाय चरती है :

$$\frac{1+24y}{24 \cdot 70}.$$

इसी तरह, 30 गायें पूरा मैदान 60 दिनों में चर जाती हैं। इससे निष्कर्ष निकलता है कि एक गाय एक दिन में चरती है :

$$\frac{1+60y}{30 \cdot 60}.$$

लेकिन दोनों ही झुंडों में एक गाय एक दिन में घास की समान मात्रा चरती है, श्रत:

$$\frac{1+27y}{24 \cdot 70}=\frac{1+60y}{30 \cdot 60}.$$

जिससे

$$y=\frac{1}{480}.$$

दिन भर घास की वृद्धि y ज्ञात करके सरलतापूर्वक निर्धारित किया जा सकता है कि एक दिन भर गाय घास की कुल श्रारंभिक मात्रा का कितना श्रंश चर जाती है :

$$\frac{1+24y}{24 \cdot 70}=\frac{1+24 \cdot \frac{1}{480}}{24 \cdot 70}=\frac{1}{1600}.$$

श्रंत में प्रश्न हल करने के लिये समीकरण रचते हैं :

यदि गायों की संख्या x है, तो

$$\frac{1+96 \cdot \frac{1}{480}}{96x}=\frac{1}{1600},$$

जिससे $x=20$.

96 दिन में सारी घास 20 गायें चर जाती हैं।

न्यूटन का प्रश्न

अब बैलों के बारे में न्यूटन का प्रश्न देखते हैं, जिसके नमूने पर पिछला प्रश्न रचा गया था।

वैसे, प्रश्न न्यूटन ने खुद सोचकर नहीं बनाया था, यह लोकगणित का प्रश्न है।

"तीन मैदानों में समान रूप से घनी घास समान गति से पनपती है; उनके क्षेत्रफल हैं: $3\frac{1}{3}$ha (हेक्टर), 10ha और 24ha। पहला मैदान 12 बैलों का 4 सप्ताह तक पोषण कर सकता है और दूसरा – 21 बैलों का 9 सप्ताह तक। तीसरा मैदान 18 सप्ताह तक कितने बैलों का पोषण कर सकता है?"

हल

सहायक अज्ञात राशि y का उपयोग करेंगे, जो यह द्योतित करता है कि एक सप्ताह के दौरान 1ha में आरंभिक घास का कौनसा अंश नया पनपता है। पहले मैदान में एक सप्ताह के दौरान $3\frac{1}{3}y$ नयी घास पनपती है, और 4 सप्ताह के दौरान: $3\frac{1}{3}y \cdot 4 = \frac{40}{3}y$ अंश (उस भंडार का, जो 1ha में शुरू-शुरू था)। यह वही बात हुई, मानो मैदान का आरंभिक क्षेत्रफल बढ़कर

$$\left(3\,\frac{1}{3} + \frac{40}{3}\,y\right)\text{ha}$$

के बराबर हो गया है। अन्य शब्दों में, बैल इतनी घास चर जाते हैं, जितनी $3\frac{1}{3} + \frac{40}{3}y$ हेक्टर क्षेत्रफल पर होती है। एक सप्ताह में 12 बैल इस मात्रा का $\frac{1}{48}$ अंश, अर्थात

$$\left(3\frac{1}{3}+\frac{40y}{3}\right):48=\frac{10+40y}{144}$$

हेक्टर चर जाते हैं।

अब इसी प्रकार दूसरे मैदान के बारे में दिये गये मानों की सहायता से मैदान का वह क्षेत्रफल ज्ञात करते हैं, जो एक बैल का एक सप्ताह तक पोषण करता है:

1 ha पर 1 सप्ताह में वृद्धि $= y$,
1 ha पर 9 सप्ताह में वृद्धि $= 9y$.
10 ha पर 9 सप्ताह में वृद्धि $=90y$.

21 बैलों का 9 सप्ताह तक पोषण करने वाले मैदान का क्षेत्र-फल हुआ:

$$10+90y$$

अतः एक बैल का एक सप्ताह तक पोषण करने के लिये पर्याप्त क्षेत्र :

$$\frac{10+90y}{9\cdot 21}=\frac{10+90y}{189}\text{ ha}$$

पोषण के दोनों ही कोटा आपस में बराबर होने चाहिये :

$$\frac{10+40y}{144}=\frac{10+90y}{189}$$

यह समीकरण हल करने पर : $y=\frac{1}{12}$.

अब उस मैदान का क्षेत्रफल निर्धारित करते हैं, जिसमें उगी हुई घास एक बैल को एक सप्ताह तक खिलाने के लिये काफी हो:

$$\frac{10+40y}{144}=\frac{10+40\cdot\frac{1}{12}}{144}=\frac{5}{54}\text{ ha.}$$

अंत में प्रश्न का उत्तर ढूंढ़ते हैं। बैलों की इष्ट संख्या को x से द्योतित करने पर मिलता है:

$$\frac{24+24\cdot 18\cdot \frac{1}{12}}{18x}=\frac{5}{54},$$

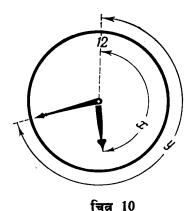
जिससे $x=36$

तीसरा मैदान 18 सप्ताह तक 36 बैलों का पोषण कर सकता है।

घड़ी की सूइयों का क्रमचय

प्रश्न

विख्यात भौतिकविद आइंस्टाइन के मित्र और जीवनी-लेखक मोश्कोव्स्की ने एक बार अपने बीमार मित्र का मनोरंजन करने के लिये उन्हें एक प्रश्न दिया (चित्र 10):

चित्र 10

"12 बजे सूइयों की स्थिति को देखें, – मोश्कोव्स्की ने कहा। – यदि इस स्थिति में बड़ी की जगह छोटी और छोटी की जगह बड़ी सूई लगा दें, तो घड़ी का पठन ठीक ही होगा। पर दूसरी स्थिति में जैसे 6 बजे, उनकी अदला-बदली करने पर ऐसा निरर्थक पठन मिलेगा, जो सही चलने वाली घड़ी में संभव ही नहीं है: मिनट की सूई 6 पर नहीं हो सकती, जिस समय घंटे की सूई 12 दिखायेगी। प्रश्न है: घड़ी की सूइयां कब और कितनी बार ऐसी स्थिति में आती हैं, जिसमें उनकी अदला-बदली करने पर जो नयी स्थिति मिलती हो, वह सही चलने वाली घड़ी में संभव हो?

– हां, – आइंस्टाइन ने जवाब दिया, – बीमारी के कारण बिस्तर पर लेटने को मजबूर आदमी के लिये यह अच्छा प्रश्न है: पर्याप्त रोचक भी है और बहुत आसान भी नहीं है। लेकिन मुझे डर है कि इससे ज्यादा देर तक मनोरंजन नहीं हो सकेगा: हल का रास्ता मुझे मिल चुका है।

और थोड़ा-सा उठकर उन्होंने दो-चार रेखाओं से एक आरेख बना दिया जो प्रश्न की शर्त्त व्यक्त करता था। हल करने में उन्हें इससे कम ही समय लगा, जितना मुझे प्रश्न कहने में लगा था...

कैसे यह प्रश्न हल होता है?

हल

सूइयों की दूरी डायल पर परिधि के 60-वें अंशों में उस बिन्दु से नापा करेंगे, जहां संख्या 12 अंकित है।

मान लें कि इष्ट स्थितियों में से एक स्थिति तब आती है, जब घंटे की सूई 12 से x अंश आगे बढ़ती है और मिनट की सूई y अंश आगे बढ़ती है। चूँकि घंटे की सूई 60 अंश 12 घंटे में तय करती

है, अर्थात् 5 अंश 1 घंटे में तय करती है, इसलिये वह x अंश $\frac{x}{5}$ घंटे में तय करेगी। यदि दूसरे शब्दों में कहें, तो जिस समय घड़ी 12 बजे का समय दिखा रही थी, उस समय से $\frac{x}{5}$ घंटे बीत चुके हैं। मिनट की सूई y अंश y मिनट में, अर्थात् $\frac{y}{60}$ घंटे में तय करती है। अन्य शब्दों में, मिनट की सूई अंक 12 को $\frac{y}{60}$ घंटे पहले पार की थी, या जिस समय दोनों सूइयां 12 पर थीं, उसके

$$\frac{x}{5}-\frac{y}{60}$$

मिनट बाद पार की थी। यह संख्या पूर्णांक है (0 से 11 तक की), क्योंकि यह दिखाती है कि 12 बजे के बाद कितने पूर्ण घंटे बीत चुके हैं।

जब सूइयां अपने स्थानों की अदला-बदली कर लेंगी, तो हम इसी तरह से निर्धारित कर सकते हैं कि बारह बजे से लेकर इस नयी स्थिति तक

$$\frac{y}{5}-\frac{x}{60}$$

पूर्ण घंटे बीत चुके हैं। यह संख्या भी पूर्णांक है (शून्य से ग्यारह तक की)।

अतः दो समीकरणों का एक तंत्र मिलता है:

$$\begin{cases}\frac{x}{5}-\frac{y}{60}=m,\\ \frac{y}{5}-\frac{x}{60}=n,\end{cases}$$

जहां m और n पूर्ण संख्याएं हैं, जिनका मान 0 से 11 तक बदल सकता है। इस तंत्र से ज्ञात होता है:

$$x=\frac{60(12m+n)}{143},$$

$$y=\frac{60(12n+m)}{143},$$

5*

m और n को 0 से 11 तक के मान बारी-बारी से देकर हम सूइयों की इष्ट स्थितियों की संख्या ज्ञात कर सकते हैं। चूँकि m के 12 मानों में से हरेक के साथ n के 12 मान लिये जा सकते हैं, इसलिये तंत्र के सभी हलों की संख्या $12 \cdot 12 = 144$ होगी। पर वास्तविकता में वह सिर्फ 143 होगी, क्योंकि $m=0$, $n=0$ होने पर और $m=11$, $n=11$ होने पर सूइयों कि स्थितियां एक जैसी होंगी। $m=11$, $n=11$ होने पर:

$$x=60, \quad y=60,$$

अर्थात् घड़ी 12 का समय दिखा रही है। यदि $m=0$ और $n=0$ रखेंगे, तो भी यही बात होगी।

यहां हम सभी संभव स्थितियां नहीं देख सकेंगे; सिर्फ दो उदाहरण लेते हैं:

पहला उदाहरण:

$$m=1, \quad n=1,$$

$$x=\frac{60 \cdot 13}{143}=5\frac{5}{11}, \quad y=5\frac{5}{11},$$

अर्थात् घड़ी 1 घंटा $5\frac{5}{11}$ मिनट दिखा रही है, इस क्षण सूइयां संपात कर जाती हैं और बेशक उनके स्थानों की अदला-बदली की जा सकती है (यह संपात की हर अवस्था में संभव है)।

दूसरा उदाहरण:

$$m=8, \quad n=5$$

$$x=\frac{60(5+12 \cdot 8)}{143} \approx 42.38, \quad y=\frac{90(8+12 \cdot 5)}{143} \approx 28.53.$$

समय के तदनुरूप क्षण होंगे: 8 घंटे 28.53 मिनट और 5 घंटे 42.38 मिनट।

हलों की संख्या हम जानते हैं: 143। डायल पर सूइयों की इष्ट स्थितियां देने वाले सभी बिन्दुओं का पता लगाने के लिये डायल की परिधि को 143 तुल्य भागों में बाँट देना चाहिये; इससे 143 बिन्दु मिलेंगे, जो इष्ट हैं। अन्य बिन्दुओं पर सूइयों की इष्ट स्थिति नहीं मिल सकती।

घड़ी की सूइयों का संपातन

प्रश्न

सही चलने वाली घड़ी में ऐसी कितनी स्थितियां होती हैं, जब घंटे और मिनट की सूइयां संपात करती हैं।

हल

हम पिछले प्रश्न में प्राप्त समीकरण का उपयोग कर सकते हैं, क्योंकि घंटे और मिनट की सूइयां जब भी संपात करती हैं, उनके स्थानों की अदला-बदली से कोई फर्क नहीं पड़ता है। साथ ही, इसमें दोनों सूइयां अंक 12 से समान दूरी पर हैं, अर्थात् $x=y$ है। इस प्रकार पिछले प्रश्न के विचार-क्रम का अनुसरण करके हम निम्न समीकरण निकालते हैं:

$$\frac{x}{5}-\frac{x}{60}=m,$$

जहां m कोई पूर्ण संख्या है (0 से 11 तक की)। इस समीकरण से प्राप्त होता है:

$$x=\frac{60m}{11}.$$

m के बारह संभव मानों (शून्य से ग्यारह तक) के अनुसार x के बारह मान होने चाहियें, पर वास्तविकता में वे सिर्फ 11 हैं, अर्थात् सूइयों के संपात करने की सिर्फ 11 स्थितियां हैं, क्योंकि $m=11$ होने पर $x=60$ मिलता है, जिसका अर्थ है कि दोनों सूइयां 60 अंश तय कर चुकी हैं (12 बजे के बाद से) और अब पुनः 12 बजा रही हैं, $m=0$ होने पर भी वे इसी स्थिति में होती हैं।

संख्या बूझने की कला

संख्या बूझने के 'जादू' से आप निश्चय ही परिचित होंगे।जादूगर आपसे अक्सर निम्न प्रकार की संक्रियाएं संपन्न करने को कहता है: कोई संख्या सोचो, उसमें 2 जोड़ दो, उसे गुणा कर लो, 5 घटा लो, सोची हुई संख्या घटा लो, आदि-आदि। इसके बाद जादूगर पूछता है कि आपके पास क्या बचा है और आपसे उत्तर मिलते ही आपकी सोची संख्या बता देता है।

'जादू' का रहस्य निश्चय ही बहुत सरल है, वह सिर्फ समीकरणों पर आधारित रहता है।

उदाहरण के लिये मान लें कि जादूगर आपसे निम्न संक्रियाएं संपन्न करने को कहता है (सारणी में बायां स्तंभ):

इसके बाद जादूगर आपसे अंतिम परिणाम बताने का अनुरोध करता है, उसे प्राप्त करते ही वह आपकी सोची हुई संख्या बता देता है। कैसे वह बताता है?

यह समझने के लिये सारणी के दायें स्तंभ को देख लेना ही पर्याप्त रहेगा, जिसमें जादूगर के निर्देश बीजगणितीय भाषा में अनूदित हैं। इस स्तंभ से स्पष्ट है कि यदि कोई संख्या x सोची गयी थी, तो सभी संक्रियाएं संपन्न करने के बाद आपके पास $4x+1$ बचना

एक संख्या सोचो	x
उसमें 2 जोड़ दो	$x+2$
उत्तर में 3 से गुणा करो	$3x+6$
5 घटा लो,	$3x+1$
सोची हुई संख्या घटाग्रो,	$2x+1$
2 से गुणा करो,	$4x+2$
1 घटा लो	$4x+1$

चाहिये। इसका मान जान लेने के बाद x क्या है, यह 'ताड़ना' कठिन नहीं होगा।

उदाहरण के लिये मान लें कि ग्रापके पास 33 बचता है ग्रौर यह ग्राप जादूगर को बता देते हैं। जादूगर तुरंत मन ही मन समीकरण $4x+1=33$ को हल कर लेता है ($x=8$) ग्रौर ग्रापको बताता है कि ग्रापने संख्या 8 सोची थी। यदि ग्रन्य शब्दों में कहा जाये, तो वह ग्रंतिम परिणाम (33) में से 1 घटा लेता है (33—1=32) ग्रौर ग्रंतर में 4 से भाग दे देता है (32:4=8) ; इसी से पता लगता है कि सोची गयी संख्या 8 है। ग्रगर ग्रापके पास 25 बचता है तो जादूगर मन में 25 से 1 घटा लेता है (25—1=24) ग्रौर 24 में 4 से भाग देता है। ग्रतः 6 मिलता है। मतलब संख्या 6 सोची गयी थी।

आप देखते हैं कि यह बहुत आसान है: जादूगर पहले से जानता है कि सोची गयी संख्या प्राप्त करने के लिये परिणाम के साथ क्या करना चाहिये।

यह समझ लेने के बाद आप अपने साथी को सोची गयी संख्या के साथ स्वयं अपने मनोनुकूल संक्रियाएं संपन्न करने को कहकर उसे चक्कर में डाल दे सकते हैं। आप उससे कहते हैं कि वह कोई संख्या सोच ले और उसके साथ किसी भी क्रम में निम्न प्रकार की संक्रियाएं संपन्न करे: कोई ज्ञात संख्या जोड़े या घटाये (जैसे 2 जोड़े, 5 घटाये, आदि), गुणा करे[1] (2 से, 3 से, आदि), सोची गयी संख्या को ही जोड़े या घटाये। आपका साथी ढेर सारी संक्रियाओं से आपका काम बोझिल और पेंचीला बनाने की कोशिश करेगा। उदाहरण के लिये, वह संख्या 5 सोचता है (आपको यह नहीं बतायेगा) और संक्रिया संपन्न करने के साथ-साथ बताते जाता है:

– मैंने एक संख्या सोची, उसे 2 से गुणा किया, गुणनफल में 3 जोड़ा, फिर सोची हुई संख्या जोड़ी, फिर 1 जोड़ा, 2 से गुणा किया, सोची हुई संख्या घटायी, 3 घटाया, फिर से सोची हुई संख्या घटायी, 2 घटाया। अंत में परिणाम को 2 से गुणा किया और उसमें 3 जोड़ दिया।

अब यह सोचकर कि वह आपको पूरी तरह से चक्कर में डाल चुका है, विजेता की मुद्रा में आपको बताता है:

– 49 मिला।

लेकिन उसके आश्चर्य का ठिकाना न रह जायेगा, जब आप उसकी सोची हुई संख्या 5 तुरंत बता देंगे।

---

[1] अच्छा होगा यदि आप भाग देने की अनुमति न दें, क्योंकि इससे जादू जटिल हो जायेगा।

आप कैसे करते हैं? यह तो अब पर्याप्त स्पष्ट है। जब आपका मित्र संक्रियाओं के बारे में बताता है, आप अज्ञात राशि x के साथ वे ही संक्रियाएं करते जाते हैं। वह कहता है: "मैंने एक संख्या सोची...", और आप अपने मन में कहते हैं: "मतलब कि हमारे पास x है"। वह कहता है: "... 2 से गुणा किया..." (वह सचमुच मन में गुणा करता है), और आप अपने मन में कहते हैं: "अब $2x$ मिला"। वह कहता है: "...परिणाम में 3 जोड़ा..." और आप तुरंत ध्यान देते हैं कि आपके पास $3x + 4$ है, आदि। जब वह आपको पूरी तरह 'चक्कर' में डाल चुकता है और ऊपर बतायी गयी सारी संक्रियाएं पूरी कर लेता है, आपको निम्न सारणी के अनुसार परिणाम मिलते हैं (बायें स्तंभ में वे संक्रियाएं हैं, जिन्हें आपका मित्र बोलता जाता है और दायें स्तंभ में – जिन्हें आप मन ही मन अज्ञात राशि x के साथ करते हैं):

मैंने संख्या सोची,	x
उसमें 2 से गुणा किया	$2x$
परिणाम में 3 जोड़ा,	$2x+3$
फिर सोची गयी संख्या जोड़ी,	$3x+3$
अब 1 जोड़ा,	$3x+4$
2 से गुणा किया,	$6x+8$

सोची गयी संख्या घटायी,	$5x+8$
3 घटाया,	$5x+5$
फिर से सोची गयी संख्या घटायी,	$4x+5$
2 घटाया	$4x+3$
अंत में परिणाम में 2 से गुणा किया	$8x+6$
और 3 जोड़ा	$8x+9$

अंत में आप मन ही मन देखते हैं कि आपके पास परिणाम $8x+9$ है। इसी समय आपका मित्र कहता है: 49 मिला। बस, आपके पास समीकरण तैयार हो जाता है: $8x+9=49$। इसे हल करना बिल्कुल आसान है और आप उसे बताते हैं कि उसने संख्या 5 सोची थी।

यह जादू विशेष प्रभावशाली होता है, क्योंकि संक्रियाएं आप प्रस्तावित नहीं करते, उन्हें सोची गयी संख्या के साथ आपका मित्र खुद चुनकर संपन्न करता है।

लेकिन एक ऐसी स्थिति है, जब जादू काम नहीं करता। मान लें कि कई संक्रियाओं के बाद आप मन ही मन $x+14$ प्राप्त करते हैं और इसी समय आपका मित्र कहता है: "...अब सोची हुई संख्या घटायी और 14 मिला।" आप भी देखते हैं: $(x+14)-x=14$, अर्थात् सचमुच में 14 ही मिला है और कोई समीकरण नहीं बनता – आप सोची गयी संख्या बताने की स्थिति में नहीं हैं। क्या करना

चाहिये ? यही कि जैसे ही आपके पास ऐसा परिणाम मिले, जिसमें अज्ञात राशि x न हो, आप अपने मित्र को तुरंत रोक दीजिये : "बस, बस, मैं बिना तुमसे पूछे बता सकता हूँ कि तुम्हें क्या मिला है : तुम्हारे पास 14 है"। यह आपके मित्र को और भी आश्चर्य में डाल देगा, क्योंकि अभी उसने आपको कुछ भी नहीं बताया है! सोची गयी संख्या आप नहीं बता सके, फिर भी जादू मजेदार रहा!

एक उदाहरण है (बायें स्तंभ में वही है, जो आपका मित्र बोलता जाता है) :

मैंने एक संख्या सोची	x
उसमें 2 जोड़ा	$x+2$
परिणाम में 2 से गुणा किया,	$2x+4$
अब 3 जोड़ा	$2x+7$
सोची गयी संख्या घटायी,	$x+7$
5 जोड़ा	$x+12$
सोची गयी संख्या घटायी...	12

जैसे ही आपको संख्या 12, अर्थात् अज्ञात राशि के बगैर एक व्यंजन मिला, आप अपने मित्र को रोककर बता देते हैं कि उसे 12 मिला है।

थोड़ा बहुत अभ्यास करके ऐसे 'जादू' आप सरलतापूर्वक दिखा सकते हैं।

मिथ्या अर्थहीनता

प्रश्न

एक प्रश्न है जो आपको बिल्कुल अर्थहीन लग सकता है:

यदि $8 \cdot 8 = 54$ है, तो 84 कितने के बराबर होगा?

लेकिन यह विचित्र प्रश्न इतना निरर्थक नहीं है और इसे समीकरण की सहायता से हल किया जा सकता है।

आप इसका अर्थ लगाने की कोशिश करें।

हल

आप शायद समझ गये होंगे कि प्रश्न में दी गयी संख्याएं दशमिक या दशभू (दस पर आधारित) प्रणाली की नहीं हैं, अन्यथा प्रश्न "84 कितने के बराबर है" सचमुच निरर्थक होता। मान लें कि इस अज्ञात गणन-प्रणाली का आधार x है। तब संख्या '84' का अर्थ होता है 8 इकाइयां दूसरी श्रेणी की और 4 इकाइयां पहली श्रेणी की:

$$'84' = 8x + 4$$

संख्या '54' का अर्थ है $5x + 4$।

समीकरण मिलता है $8 \cdot 8 = 5x + 4$ अर्थात् दशभू प्रणाली में $64 = 5x + 4$ जिससे $x = 12$ है।

संख्याएं द्वादशभू प्रणाली में लिखी गयी हैं और '84' $= 8 \cdot 12 + 4 = 100$ है। अतः, यदि $8 \cdot 8 =$ '54' है, तो '84' $= 100$ है।

ऐसा ही एक दूसरा प्रश्न भी इसी तरह से हल होता है: यदि $5 \cdot 6 = 33$ है, तो 100 कितने के बराबर होगा?

उत्तर: 81 (नवभू गणना-प्रणाली)

समझदार समीकरण

यदि आपको संदेह है कि समीकरण समझदार होते हैं (कभी-कभी तो हमसे भी अधिक!) तो निम्न प्रश्न हल करें:

पिता की उम्र 32 वर्ष है, और पुत्र की 5 वर्ष है। कितने वर्ष बाद पिता की उम्र पुत्र से दस गुनी अधिक हो जायेगी?

इष्ट अवधि को x से द्योतित करते हैं। x वर्ष बाद पिता की उम्र $32 + x$ वर्ष होगी और पुत्र की $5 + x$ वर्ष होगी। उस समय पिता की उम्र पुत्र से दस गुनी अधिक होनी चाहिये, अतः समीकरण बनता है:

$$32+x=10(5+x)$$

समीकरण हल करने पर $x = -2$ मिलता है।

'ऋण दो वर्ष बाद' का अर्थ है 'दो वर्ष पहले'। जब हम समीकरण बना रहे थे, हमने यह नहीं सोचा कि पिता की उम्र पुत्र से भविष्य में दस गुनी अधिक नहीं हो सकती; ऐसा अनुपात सिर्फ अतीत में संभव है। समीकरण हमसे अधिक समझदार निकला और उसने हमारी गलती की याद दिला दी।

मजेदार भी श्रौर श्रप्रत्याशित भी

समीकरण हल करते वक्त कभी-कभी ऐसे उत्तर मिलते हैं, जो कम श्रनुभवी गणितज्ञ को चकरा दे सकते हैं। यहां कुछ उदाहरण प्रस्तुत करते हैं।

I. दो श्रंकों की संख्या ढूंढ़ें, जिसमें ये गुण हों: दहाई का श्रंक इकाई के श्रंक से 4 कम है। यदि इन श्रंकों को उल्टे क्रम में लिखकर प्राप्त संख्या से इष्ट संख्या घटायी जाये, तो 27 मिलेगा।

दहाई की संख्या को x श्रौर इकाई की संख्या को y से द्योतित करके इस प्रश्न के लिये हम सरलतापूर्वक निम्न समीकरण-तंत्र बना सकते हैं:

$$\begin{cases} x = y - 4, \\ (10y + x) - (10x + y) = 27 \end{cases}$$

प्रथम समीकरण से x का मान लेकर उसे दूसरे समीकरण में रखने पर प्राप्त होगा:

$$10y + y - 4 - [10(y - 4) + y] = 27,$$

श्रौर रूपांतरण करने पर:

$$36 = 27$$

श्रज्ञात राशियों के मान तो ज्ञात नहीं हुए , पर हम यह जान गये कि $36 = 27$ होता है... इसका क्या मतलब हुश्रा?

इतना ही कि दो श्रंकों की कोई भी संख्या प्रत्त शर्तों को संतुष्ट नहीं कर सकती।। हमने जो दो समीकरण बनाये हैं, वे एक-दूसरे का विरोध करते हैं।

सचमुच: प्रथम समीकरण के दोनों पक्षों को 9 से गुणा करने पर मिलता है:

$$9y - 9x = 36$$

श्रौर दूसरे सममकरण से (कोष्टक खोलने श्रौर समरूप पदों को जोड़ने-घटाने पर):

$$9y - 9x = 27.$$

एक ही राशि $9y - 9x$ प्रथम समीकरण के श्रनुसार 36 के बराबर है श्रौर दूसरे समीकरण के श्रनुसार 27 के बराबर है। यह निश्चय ही श्रसंभव है, क्योंकि $36 \neq 27$ है।

ऐसी ही गड़बड़ी निम्न समीकरण-तंत्र हल करने पर प्राप्त होगी:

$$\begin{cases} x^2y^2 = 8 \\ xy = 4 \end{cases}$$

प्रथम समीकरण में दूसरे से भाग देने पर:

$$xy = 2$$

प्राप्त हुए समीकरण की दूसरे समीकरण से तुलना करके देखते हैं कि

$$\begin{cases} xy = 4 \\ xy = 2, \end{cases}$$

श्रर्थात् $4 = 2$ मिलता है। श्रतः प्रत्त समीकरण को कोई भी संख्याएं संतुष्ट नहीं कर सकतीं। (जिन समीकरणों का तंत्र हमने श्रभी-श्रभी देखा है, उन्हें विसंगत समीकरण कहते हैं)।

II. यदि पिछले प्रश्न की शर्तों में कुछ परिवर्तन लाया जाये, तो एक श्रन्य श्रप्रत्याशित परिणाम मिलेगा। मान लेते हैं कि दहाई का श्रंक इकाई से 4 नहीं, बल्कि 3 कम है। श्रन्य शर्तें पिछले प्रश्न जैसी ही रहने देते हैं। कौनसी संख्या है यह?

समीकरण बनाते हैं। यदि दहाई की संख्या को x से द्योतित करें, तो इकाई की संख्या $x + 3$ से व्यक्त होगी। गणितीय भाषा में प्रश्न का श्रनुवाद करने पर:

$$10(x+3) = x - [10x + (x+3)] = 27$$

सरल करने पर :

$$27=27$$

यह समता निश्चय ही सही है, पर इससे x के मान का कुछ पता नहीं चलता। क्या इसका यह अर्थ लगाया जा सकता है कि प्रश्न की शर्तों को संतुष्ट करने वाली कोई भी संख्या नहीं है?

उल्टा, इसका अर्थ है कि हमने जो समीकरण बनाया है, वह तादात्म्य निकला, अर्थात् वह x के किसी भी मान के लिये सत्य है। यह आप सरलता से देख सकते हैं कि दो अंकों की कोई भी संख्या जिसमें इकाई का अंक दहाई से 3 अधिक है, प्रश्न की शर्त्त पूरी करती है :

$$14+27=41, \quad 47+27=74,$$
$$25+27=52, \quad 58+27=85,$$
$$36+27=63, \quad 69+27=96.$$

III. तीन अंकों की संख्या ढूंढ़ें, जिसमें निम्न गुण हैं :

1) दहाई का अंक 7 है;

2) सैकड़े का अंक इकाई के अंक से 4 कम है;

3) यदि इस संख्या के अंकों को उल्टे क्रम में लिखा जाये, तो नयी संख्या से 396 अधिक होगी।

इकाई के अंक को x से द्योतित करके समीकरण बनाते हैं :

$$100x+70+x-4-[100(x-4)+70+x]=396$$

सरल करने के बाद यह समीकरण निम्न समता का रूप ग्रहण कर लेता है :

$$396=396$$

पाठक अब जान चुके हैं कि इस तरह के परिणामों का क्या अर्थ होता है। इसका अर्थ है कि तीन अंकों की संख्या में यदि सैकड़े का अंक इकाई के अंक से 4 कम है,[1] तो उसे विपरीत क्रम में लिखने पर वह 396 अधिक हो जाती है।

अबतक हम लोग कुछ कृत्रिम ढंग के किताबी प्रश्न देखते रहे हैं। इनका उद्देश्य है कि समीकरण बनाने और उन्हें हल करने का कुछ अभ्यास हो जाये। अब सैद्धांतिक अस्त्र से सज्जित होकर चंद व्यावहारिक प्रश्न हल करने के उदाहरण देखेंगे, जो जीवन के विभिन्न क्षेत्रों से लिये गये हैं।

नाई की दुकान में

प्रश्न

क्या नाई की दुकान में बीजगणित की आवश्यकता पड़ सकती है? जी हां, वहां भी पड़ती है। मुझे खुद एक बार ऐसा अनुभव हुआ था। जब मैं बाल कटाने गया, तो नाई ने मुझसे एक अनुरोध किया, जिसकी मुझे कोई आशा नहीं थी :

– क्या एक समस्या के हल में आप हमारी सहायता नहीं कर सकते? हम लोगों से नहीं हो पा रहा है।

– हम लोगों ने कितना घोल बर्बाद कर दिया है इसके पीछे! – दूसरे ने कहा।

– बात क्या है? – मैंने पूछा।

---

[1] दहाई का अंक कोई भूमिका नहीं निभाता।

—हमारे पास हाइड्रोजन पैराक्साइड के घोल के दो प्रकार हैं: एक 30 प्रतिशत सांद्रता का और दूसरा 3 प्रतिशत सांद्रता का। दोनों को किस अनुपात में मिलाया जाये कि 12 प्रतिशत सांद्रता का घोल मिले? हम लोग सही अनुपात नहीं ढूंढ़ पाये...

मुझे उन्होंने कागज और कलम दी, आवश्यक अनुपात तुरंत मिल गया।

हल

प्रश्न अंकगणितीय विधि से भी हल किया जा सकता है, पर बीजगणित की भाषा लक्ष्य तक जल्द पहुंचाती है।

मान लें कि 12 प्रतिशत वाला घोल बनाने के लिये 3 प्रतिशत वाले घोल का x ग्राम और 30 प्रतिशत वाले का y ग्राम मिलाना पड़ता है। पहली खुराक (x ग्राम) में $0.03x$ ग्राम शुद्ध हाइड्रोजन पैराक्साइड होगा और दूसरी खुराक में $0.3y$ ग्राम होगा। दोनों खुराकों में हाइड्रोजन पैराक्साइड की कुल मात्रा होगी:

$$0.03x+0.3y$$

खुराकों को मिलाने पर $(x+y)$ ग्राम घोल मिलता है, जिसमें शुद्ध हाइड्रोजन पैराक्साइड की मात्रा $0.12(x+y)$ ग्राम होनी चाहिये।

अतः समीकरण मिलता है:

$$0.03x+0.3y=0.12(x+y).$$

इससे $x=2y$ ज्ञात होता है, जिसका अर्थ है कि 3 प्रतिशत वाला घोल 30 प्रतिशत वाले से दुगुना अधिक लेना चाहिये।

ट्राम ग्रौर पैदल यात्री

प्रश्न

मैं ट्राम-लाइन के सहारे चल रहा हूँ ग्रौर देखता हूँ कि पीछे से हर 12 मिनट पर एक ट्राम ग्राती है ग्रौर सामने से हर चार मिनट पर। मैं ग्रौर ट्राम दोनों समरूप गति से चल रहे हैं।

ग्रपने प्रस्थान-बिन्दुग्रों से कितने-कितने मिनट पर ट्राम-गाड़ियां निकलती हैं?

हल

यदि ट्राम हर x मिनट पर निकलती है, तो जिस जगह मेरे पीछे से एक ट्राम ग्राती है, वहीं पर x मिनट बाद ग्रगली ट्राम ग्रायेगी। लेकिन मैं ग्रागे बढ़ रहा हूँ ग्रौर $12-x$ मिनट में ट्राम मेरा पीछा करती हुई वह दूरी तय करती है, जिसे मैं 12 मिनट में तय करता हूँ। मतलब कि जो पथ मैं 1 मिनट में तय करता हूँ, ट्राम $\frac{12-x}{12}$ मिनट में तय करती है।

यदि ट्राम सामने से ग्रा रही है, तो वह मुझे पिछली वाली के 4 मिनट बाद मिलती है; बाकी $x-4$ मिनट में वह उतना लंबा पथ तय करती है, जिसे मैं 4 मिनट में तय करता हूँ। ग्रतः जो पथ मैं 1 मिनट में तय करता हूँ, ट्राम $\frac{x-4}{4}$ मिनट में तय करती है।

इससे समीकरण मिलता है:

$$\frac{12-x}{12}=\frac{x-4}{4},$$

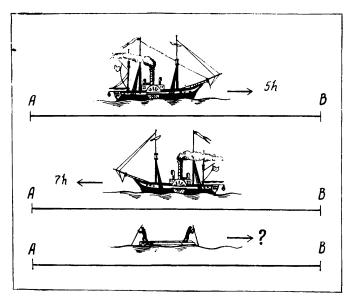
जिससे $x=6$ है। ट्राम हर छह मिनट पर निकलती है।

प्रश्न का एक निम्न हल भी सुझाया जा सकता है (जो वास्तविकता में अंकगणितीय प्रकृति का है)। मान लें कि एक ही दिशा में एक के पीछे एक चलती दो ट्रामों के बीच की दूरी a है। तब मेरे और सामने से आने वाली ट्राम के बीच की दूरी प्रति मिनट $\frac{a}{4}$ की दर से घटती है (क्योंकि अभी-अभी गुजरी ट्राम और आने वाली ट्राम के बीच की दूरी a है और मैं तथा ट्राम यह दूरी 4 मिनट में तय करते हैं)। पीछे से आती ट्राम से मेरी दूरी प्रति मिनट $\frac{a}{12}$ की दर से घटती है। अब मान लें कि मैं एक मिनट तक आगे चलता हूँ, फिर मुड़कर एक मिनट तक वापस चलता हूँ (अर्थात् पुरानी जगह लौट आता हूँ)। तब सामने से आने वाली ट्राम से मेरी दूरी प्रथम मिनट में $\frac{a}{4}$ घटती है और दूसरे मिनट में (जब वही ट्राम मेरे पीछे से आना शुरू करती है) उससे मेरी दूरी $\frac{a}{12}$ घटती है। अतः दो मिनट के दौरान उसके और मेरे बीच की दूरी में कुल कमी $\frac{a}{4}+\frac{a}{12}=\frac{a}{3}$ होती है। यदि मैं एक ही जगह खड़ा रहता तब भी यही होता, क्योंकि कुल मिलाकर तो मैं पुरानी जगह ही लौट आया। इस प्रकार, यदि मैं एक ही जगह खड़ा रहता तो एक मिनट में ट्राम से मेरी दूरी $\frac{a}{3}:2=\frac{a}{6}$ घट जाती। अतः पूरी दूरी a तय करने में 6 मिनट लगता है। इसका मतलब हुआ कि स्थिर खड़े प्रेक्षक के सामने से हर छे मिनट पर गाड़ियां गुजरती हैं।

जहाज और बेड़ा

प्रश्न

जहाज धारा की दिशा में नगर A से B तक बिना रुके हुए 5 घंटे में पहुँचता है। अपने उसी वेग से बिना रुके धारा के विपरीत

चलता हुआ वह वापस पहुँचने में सात घंटे लगाता है। बेड़े को A से B तक आने में कितने घंटे लगेंगे? (बेड़ा पानी में बहता हुआ चलता है, अर्थात् उसका वेग नदी की धारा के बराबर होता है)

चित्र 11

हल

स्थिर पानी में जहाज को A से B तक चलने में जितने घंटे लगते, उसे x से द्योतित करते हैं (स्थिर पानी में जहाज सिर्फ अपने निजी वेग से चलता है) और y से—बेड़े के चलने का समय। तब जहाज एक घंटे में दूरी AB का $\frac{1}{x}$ भाग तय करता है और बेड़ा (नदी

की धारा) दूरी AB का $\frac{1}{y}$ भाग तय करता है। इसीलिये धारा की दिशा में जहाज एक घंटे में AB का $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ भाग तय करता है और धारा की विपरीत दिशा में $\frac{1}{x}-\frac{1}{y}$ भाग तय करता है। पर प्रश्न की शर्त्त से हम जानते हैं कि धारा की दिशा में जहाज एक घंटे में $\frac{1}{5}$ दूरी तय करता है और धारा के विपरीत $\frac{1}{7}$ दूरी तय करता है। अतः निम्न तंत्र मिलता है:

$$\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{5}, \\ \frac{1}{x}-\frac{1}{y}=\frac{1}{7}. \end{cases}$$

ध्यान दें कि इस तंत्र को हल करते वक्त भिन्न से छुटकारा पाने की आवश्यकता नहीं है: प्रथम समीकरण से दूसरा समीकरण घटा लेना काफी है, जिसके फलस्वरूप:

$$\frac{2}{y}=\frac{2}{35}, \text{ या } y=35.$$

बेड़ा A से B तक 35 घंटों में पहुँचता है।

कौफी के डब्बे

प्रश्न

कौफी से भरे टिन के दो डब्बों की आकृति बिल्कुल समान है। पहले डब्बे का भार 2kg है और उसकी ऊँचाई 12cm है; दूसरे का भार 1kg है और उसकी ऊँचाई 9.5cm है। डब्बों में सिर्फ कौफी का वजन बतायें।

हल

बड़े डब्बे में कौफी का भार x से द्योतित करते हैं और छोटे डब्बे में y से। खाली बड़े डब्बे का भार z और खाली छोटे डब्बे का भार t मान लेते हैं। दो समीकरण हैं:

$$\begin{cases} x+z=2, \\ x+t=1 \end{cases}$$

भरे हुए डब्बों में कौफी के भार डब्बे के आयतनों के साथ समानुपाती होते हैं और इसीलिये वे उनकी ऊँचाइयों के घनों के साथ भी समानुपाती होते हैं[1]; अतः

$$\frac{x}{y}=\frac{12^3}{9.5^3}\approx 2.02, \quad \text{या} \quad x=2.02y.$$

खाली डब्बों के भार उनकी पूर्ण सतहों, और इसीलिये उनकी ऊँचाइयों के वर्गों के साथ समानुपाती होते हैं, इसलिये

$$\frac{z}{t}=\frac{12^2}{9.5^2}\approx 1.60, \quad \text{या} \quad z=1.60t.$$

x और z के ये मान प्रथम समीकरण-तंत्र में रखने पर निम्न तंत्र मिलता है:

$$\begin{cases} 2.02y+1.60t=2, \\ y+t=1 \end{cases}$$

इसे हल करने पर पता चलता है:

$$y=\frac{20}{21}=0.95, \quad t=0.05$$

---

[1] इस तरह के अनुपातों का उपयोग तभी करना चाहिये, जब डब्बों की दीवारें बहुत पतली हों (क्योंकि डब्बों की बाहरी और भीतरी सतहें पूरी समरूप नहीं होतीं; इसके अतिरिक्त भीतरी ऊँचाई और बाहरी ऊँचाई भी बिल्कुल एक जैसी नहीं होतीं।

अत :

$$x=1.92, \quad z=0.08.$$

बड़े डब्बे में कौफी का भाग 1.92kg है और छोटे डब्बे में—0.94kg.

डांस-पार्टी

प्रश्न

शाम की एक पार्टी में नाचने वाले 20 थे। मारीया सात लड़कों के साथ नाची, ओल्गा—आठ लड़कों के साथ, वेरा—नौ लड़कों के साथ, .. और इसी तरह नीना तक, जो सभी लड़कों के साथ नाची। कितने लड़के थे पार्टी में ?

हल

प्रश्न बहुत आसानी से हल हो सकता है, यदि सही अज्ञात राशि चुन सकेंगे। हम लड़कों की नहीं, बल्कि लड़कियों की संख्या ढूढ़ेंगे और इसे x से द्योतित करेंगे :

1-ली, मारीया	नाची	$6+1$	लड़कों	के	साथ
2-री, ओल्गा	«	$6+2$	«	«	«
3-री, वेरा	«	$6+3$	«	«	«
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
x-वीं, नीना	«	$6+x$	«	«	»

अतः समीकरण मिलता है :

$$x+(6+x)=20,$$

जिससे

$$x=7,$$

अतः लड़कों की संख्या –

$$20-7=13.$$

समुद्री गुप्तचरी

प्रश्न 1

युद्धपोतों के साथ चल रहे गुप्तचर (टोही) बोट को काम दिया गया कि वह युद्धपोतों के चलने की दिशा में आगे बढ़कर 70 मील की दूरी तक शत्रु की टोह लेकर वापस आ जाये। युद्धपोतों का वेग 35 मील प्रति घंटा है और टोही बोट का वेग 70 मील प्रति घंटा है। टोही बोट युद्धपोतों के पास वापस कितनी देर में पहुँचेगा?

हल

इष्ट संख्या को x से द्योतित करते हैं। इतनी देर में युद्धपोत $35x$ मील आगे बढ़ जायेंगे और टोही बोट $70x$ मील तय कर चुकेगा (टोही बोट आगे की ओर 70 मील चलता है और इसका एक अंश वापसी में तय करता है)। दोनों साथ-साथ मिलकर $70x+35x$ लंबा पथ तय करते हैं, जो $2 \cdot 70$ मील के बराबर है। समीकरण बनता है

$$70x+35x=140,$$

जिससे

$$x = \frac{140}{105} = 1\frac{1}{3} \text{ घंटा।}$$

टोही बोट 1 घंटा 20 मीनट बाद लौटेगा।

प्रश्न 2

टोही बोट को आज्ञा मिली है कि युद्धपोत चलने की दिशा में आगे जाकर टोह ले। उसे 3 घंटे में लौट आना है। युद्धपोत छोड़ने के कितने समय बाद उसे वापस मुड़ना चाहिये, यदि उसका वेग 60 नौट है और पोत का वेग 40 नौट है?

हल

मान लें कि टोही बोट को x घंटे बाद मुड़ना चाहिये; इसका मतलब है कि वह x घंटे तक पोत से दूर होता रहा और $x - 3$ घंटे पोत की ओर चला। जबतक दोनों ही एक दिशा में चलते रहे, टोही बोट x घंटे में पोत से इतना दूर हुआ, जितना उनके द्वारा तय किये गये पथों का अंतर है, अर्थात्

$$60x - 40x = 20x$$

लौटते समय टोही बोट 60 $(3 - x)$ के बराबर पथ तय करता है और पोत 40 $(3 - x)$ के बराबर। दोनों मिलकर $10x$ मील गये। इसलिये

$$60(3 - x) + 40(3 - x) = 20x,$$

जिससे

$$x = 2\frac{1}{2}.$$

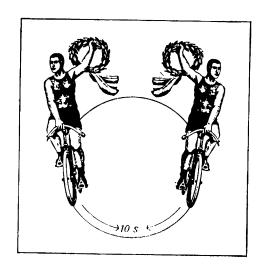
टोही बोट को पोत छोड़ने के 2 घंटे 30 मिनट बाद वापस मुड़ जाना चाहिये।

सायकिल की सवारी

प्रश्न

गोल रास्ते पर दो सायकिल-सवार स्थिर वेग से चल रहे हैं। जब वे परस्पर विपरीत दिशाओं में चलते हैं, तो वे हर 10 सेकेंड में मिलते हैं; जब वे समान दिशा में चलते हैं, तो एक सायकिल-सवार दूसरे को हर 170 सेकेंड में पकड़ता है। हर सायकिलसवार का वेग बतायें; गोल रास्ते की लंबाई 170m है।

चित्र 12

हल

यदि प्रथम सायकिल-सवार का वेग x है, तो 10 सेकेंड में वह $10x$ मीटर चलता है। सामने से आता हुआ दूसरा सवार एक भेंट के बीच परिधि का बाकी भाग, अर्थात् $170-10x$ मीटर तय करता है। यदि दूसरे सवार का वेग y है, तो इस पथ की लंबाई $10y$ मीटर होगी, अर्थात्

$$170-10x=10y.$$

यदि सायकिल-सवार आगे पीछे चल रहे हैं, तो पहला सवार 170 सेकेंड में $170x$ मीटर चलता है और दूसरा $170y$ मीटर चलता है। यदि पहला सवार अधिक तेज चल रहा है, तो वह एक भेंट से दूसरे भेंट के बीच एक चक्कर अधिक लगाता है, बनिस्बत कि दूसरा सवार, अर्थात्

$$170x-170y=170.$$

इस समीकरणों को सरल करने पर इनका रूप निम्न होता है:

$$x+y=17, \quad x-y=1,$$

जिससे

$$x=9, \ y=8$$ (मीटर प्रति सेकेंड)।

फटफटिया-रेस

प्रश्न

तीन में से एक फटफटिया दूसरी से 15 किलोमीटर प्रति घंटा कम तथा तीसरी से 3 किलोमीटर प्रति घंटा अधिक वेग से रेस शुरू

करती है और 'फिनिश' पर पहली से 12 मिनट बाद तथा तीसरी से 3 मिनट पहले पहुँचती है। रास्ते में कहीं भी विराम नहीं था।

निर्धारित करना है:

(*a*) पथ कितना लंबा है?

(*b*) हर फटफटिया का वेग कितना है?

(*c*) कितनी देर तक हर फटफटिया गतिमान रही है।

हल

प्रश्न में सात अज्ञात राशियों का मान ज्ञात करने को कहा जा रहा है, पर हम दो से काम चला लेंगे–दो अज्ञात राशियों वाले दो समीकरणों का तंत्र बना कर।

x से दूसरी फटफटिया का वेग द्योतित करते हैं। तब पहली फटफटिया का वेग $x+15$ से व्यक्त होगा और तीसरी का $x-3$ से।

पथ की लंबाई को y से द्योतित करते हैं, तब फटफटियों के गतिकाल निम्न होंगे:

पहली	फटफटिया	का	$\frac{y}{x+15}$,
दूसरी	»	»	$\frac{y}{x}$,
तीसरी	»	»	$\frac{y}{x-3}$.

हम जानते हैं कि दूसरी फटफटिया का गतिकाल पहली से 12 मिनट (अर्थात् $\frac{1}{5}$ घंटा) अधिक था, इसीलिये

$$\frac{y}{x}-\frac{y}{x+15}=\frac{1}{5}.$$

तीसरी फटफटिया रास्ते में दूसरी से 3 मिनट (अर्थात् $\frac{1}{20}$ घंटा) अधिक रही है, अतः

$$\frac{y}{x-3}-\frac{y}{x}=\frac{1}{20}.$$

इनमें से दूसरे समीकरण को 4 से गुणा करते हैं और उसे पहले समीकरण में से घटा लेते हैं:

$$\frac{y}{x}-\frac{y}{x+15}-4\left(\frac{y}{x-3}-\frac{y}{x}\right)=0.$$

इस समीकरण के सभी पदों को y से भाग देते हैं (यह राशि, जैसा हम जानते हैं, शून्य के बराबर नहीं है) और इसके बाद भिन्न से छुटकारा पाते हैं। इससे मिलता है:

$$(x+15)(x-3)-x(x-3)-4x(x+15)+4(x+15)(x-3)=0.$$

कोष्ठक तोड़कर समरूप पदों का जोड़-घटाव कर लेने के बाद:

$$3x-225=0,$$

जिससे

$$x=75.$$

x जान लेने के बाद प्रथम समीकरण से y का मान ज्ञात करते हैं:

$$\frac{y}{75}-\frac{y}{90}=\frac{1}{5},$$

या $y=90$.

इस प्रकार फटफटियों के वेग निर्धारित हो चुके हैं:

90, 75 और 72 किलोमीटर प्रति घंटा।

पथ की लंबाई $=90$ किलोमीटर।

पथ की लंबाई को प्रत्येक फटफटिया के वेग से भाग देने पर उसका गतिकाल ज्ञात हो जायेगा :

पहली फटफटिया . . . 1 घंटा,
दूसरी का . . . . . 1 घंटा 12 मिनट,
तीसरी का . . . . . 1 घंटा 15 मिनट।

इस तरह सभी सात अज्ञात राशियां ज्ञात हो गयीं।

औसत वेग

प्रश्न

कार एक शहर से दूसरे शहर तक 60 किलोमीटर प्रति घंटा के वेग से गयी और वापस हुई 40 किलोमीटर प्रति घंटा के वेग से। कार का औसत वेग कितना है?

हल

प्रश्न की सरलता एक छलावा है, जो बहुत से लोगों को भटका देता है। वे प्रश्न की शर्तों को गहराई से देखे बिना ही 60 और 40 का समांतरी औसत, अर्थात् उनका अर्ध योगफल

$$\frac{60+40}{2}=50$$

निकालने लगते हैं।

यह 'सरल' हल तभी सही होता, जब कार दोनों ही दिशाओं में समान समय व्यय करती। पर यहां स्पष्ट है कि वापसी में (वेग

कम होने के कारण) समय अधिक लगा है। यदि इस बात को ध्यान में रखेंगे, तो एक ही निष्कर्ष निकलेगा: उत्तर 50 गलत है।

सचमुच ही, समीकरण से दूसरा उत्तर मिलेगा। समीकरण बनाना कठिन नहीं होगा, यदि हम एक सहायक अज्ञात राशि l (शहरों की दूरी) का उपयोग करेंगे। इष्ट औसत वेग को x से द्योतित करके समीकरण बनाते हैं:

$$\frac{2l}{x}=\frac{l}{50}+\frac{l}{40}.$$

चूंकि l शून्य के बराबर नहीं है, अतः समीकरण में l से भाग दे सकते हैं:

$$\frac{2}{x}=\frac{1}{60}+\frac{1}{40}.$$

जिससे

$$x=\frac{2}{\frac{1}{60}+\frac{1}{40}}=48.$$

अतः सही उत्तर 50 किलोमीटर प्रति घंटा नहीं, बल्कि 48 किलोमीटर प्रति घंटा है।

यदि हम यह प्रश्न प्रतीकों में हल करते (कार गयी a किलो-मीटर प्रति घंटा के वेग से और वापस आयी b किलोमीटर प्रति घंटा के वेग से), तो समीकरण मिलता:

$$\frac{2l}{x}=\frac{l}{a}+\frac{l}{b},$$

जिससे x का मान मिलता है

$$\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}},$$

इस राशि को a और b का हरात्मक औसत कहते हैं।

इस प्रकार, गति का औसत वेग समांतरी औसत द्वारा नहीं बल्कि हरात्मक औसत द्वारा व्यक्त होता है। धनात्मक a और b के लिये हरात्मक औसत सदा कम होता है, बनिस्बत कि समांतरी औसत

$$\frac{a+b}{2}$$

के; यह हम सांख्यिक उदाहरण में भी देख चुके हैं (48 कम है 50 से)।

द्रुत कलनक मशीनें

'मनोरंजक बीजगणित' में समीकरणों के बारे में बातचीत कलनक मशीनों से समीकरण हल करने की विधि के बिना पूरी नहीं हो सकती। हम बता चुके हैं कि कलनक मशीनें शतरंज खेल सकती हैं। ये गणितीय मशीनें अन्य कार्य भी कर सकती हैं, जैसे एक भाषा से दूसरी में अनुवाद, संगीत-लय की अल्पना, आदि। इसके लिये सिर्फ तदनुरूप प्रोग्राम बनाना पड़ता है, जिसके अनुसार मशीन काम करती है।

यहां हम शतरंज के खेल या एक भाषा से दूसरी में अनुवाद के प्रोग्राम नहीं देखेंगे, क्योंकि ये बहुत ही जटिल हैं। यहां हम सिर्फ दो सरल प्रोग्रामों का विश्लेषण करेंगे, लेकिन इसके पहले हमें कलनक मशीनों की बनावट की एक झलक लेनी चाहिये।

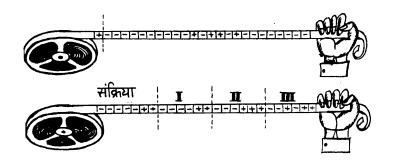
ऊपर (अध्याय 1 में) हम ऐसी प्रयुक्तियों के बारे में बता चुके हैं, जिनकी सहायता से एक सेकेंड में हजारों संक्रियाएं संपन्न हो सकती हैं। मशीन में संक्रियाएं संपन्न करने वाला अंग गणितीय प्रयुक्ति

कहलाता है। इसके अतिरिक्त मशीन में संचालक प्रयुक्ति भी होती है, जो पूरी मशीन के कार्य का नियमन करती है। मशीन में तथाकथित स्मृति भी होती है। स्मृति या स्मर्नक प्रयुक्ति संख्याओं और प्रतीकों का 'भंडार-घर' है। अंततः, मशीन में नये प्रत्तांकों के प्रवेश और तैयार परिणामों के निकास के लिये भी विशेष प्रयुक्तियां लगी होती हैं। इन परिणामों को मशीन विशेष कार्डों पर दशमलव प्रणाली में छाप देती है।

यह तो सभी अच्छी तरह जानते होंगे कि ध्वनि को रेकार्ड या टेप पर अभिलिखित किया जा सकता है और फिर उसे दुबारा सुना जा सकता है। लेकिन रेकार्ड पर ध्वनि एक ही बार अभिलिखित हो सकती है। नये अभिलेख के लिये नया रेकार्ड चाहिये। चुंबकीय टेप-रिकार्डर में ध्वनि का लेख कुछ दूसरी तरह से होता है: इसमें एक विशेष प्रकार के टेप (फीते) का चुंबकन किया जाता है (इसीलिये इसका एक नाम मैग्नेटोफोन भी है)। अभिलिखित ध्वनि मनचाही बार उत्पन्न की जा सकती है, लेकिन यदि अभिलेख की आवश्यकता नहीं रह जाये, तो उसे 'मिटाया' जा सकता है और टेप पर नयी ध्वनि अभिलिखित की जा सकती। एक ही टेप पर एक के बाद एक कई अभिलेख बनाये जा सकते हैं; हर अभिलेख पिछले अभिलेख को स्वतः 'मिटा' देता है।

स्मर्नक प्रयुक्तियों का कार्य ऐसे ही सिद्धांत पर आधारित है। संख्याएं और प्रतीक एक विशेष बेलन पर अंकित होते हैं (वैद्युत, चुंबकीय अथवा यांत्रिक संकेतों की सहायता से)। जब आवश्यकता हो अभिलिखित संख्या 'पढ़ी' जा सकती है, आगे आवश्यकता नहीं होने पर उसे 'मिटा' कर उसकी जगह दूसरी संख्या लिखी जा सकती है। संख्या या संकेत को 'याद करने' या 'पढ़ने' में सेकेंड का सिर्फ दस लाखवां अंश खर्च होता है।

'स्मृति' में कई हजार खंदे होते हैं, हर खंदे में दसियों घर (उदाहरण के लिये चुंबकीय घर) होते हैं। संख्याओं को द्विभू प्रणाली में लिखने के लिये तय कर लेते हैं कि हर चुंबकित घर अंक 1 को द्योतित करता है और अचुंबकित घर–अंक 0 को। मान लें कि एक खंदे में 25 घर (या, जैसा अक्सर कहते हैं, 25 'द्विभू श्रेणियां') हैं। खंदे का पहला घर संख्या का चिन्ह (+ या –) द्योतित करने के काम आता है। अगली 14 श्रेणियां पूर्णांक द्योतित करती हैं और अंतिम 10 श्रेणियां–संख्या का भिन्नांक द्योतित करती हैं।

चित्र 13 में स्मृति के दो खंदे दिखाये गये हैं, जिनमें से प्रत्येक

चित्र 13

में 25 श्रेणियां हैं। चुंबकित घर चिन्ह '+ से दिखाये गये हैं और अचुंबकित घर–चिन्ह '–' से। आरेख में ऊपरी खंदे को देखें (अर्धविराम दिखाता है कि भिन्नांक कहां से शुरू होता है; डैश-रेखा प्रथम श्रेणी को अलग करती है, जिसमें संक्रिया-चिन्ह लिखा जाता है)। उसमें द्विभू गणना-प्रणाली में संख्या +1011.01 लिखी गयी है; दशमलव गणना-प्रणाली में यह संख्या 11.25 के बराबर हुई।

7*

खंदों में संख्याओं के अतिरिक्त कमांड (आज्ञाएं) भी लिखे जाते हैं; ये ही मिल-जुल कर प्रोग्राम (कार्यक्रम) निर्धारित करते हैं। देखा जाये कि तथाकथित तीन पते वाली मशीन के लिये प्रोग्राम कैसा होता है। इस स्थिति में कमांड अभिलिखित करने के लिये स्मृति के खंदों को चार भागों में बाँटते हैं (जैसे चित्र 13 के निचले खंदे को डैश-रेखाओं से)। पहले हिस्से में संक्रियाएं द्योतित की जाती हैं और संक्रियाएं संख्याओं (नंबरों) की सहायता से द्योतित होती हैं।

उदाहरणार्थ,

जोड़ – संक्रिया 1,
घटाव – संक्रिया 2,
गुणा – संक्रिया 3 आदि।

कंमाड निम्न प्रकार से समझना चाहिये: खंदे के पहले हिस्से में संक्रिया का नंबर होता है, दूसरे और तीसरे खंदों में उन संख्याओं के नंबर (पता) होते हैं, जिनके साथ यह संक्रिया करनी है, चौथे हिस्से में उस खंदे का नंबर (पता) होता है, जहां प्राप्त परिणाम भेजना है। उदाहरणार्थ, चित्र 13 (निचली पंक्ति) में द्विभू प्रणाली की संख्याएं 11, 11, 111, 1011 (दशमलव प्रणाली में 3, 3, 7, 11) अंकित हैं, जिनका अर्थ निम्न कमांड है: स्मृति के तीसरे और सातवें खंदे में स्थित संख्याओं के साथ संक्रिया 3 (अर्थात् गुणा) किया जाये और परिणाम ग्यारहवें खंदे में भेजा जाये।

आगे हम लोग संख्याएं और कमांड चित्र 13 की तरह प्रतीकों में नहीं, सीधा दशमलव प्रणाली में लिखेंगे। उदाहरणार्थ, चित्र 13 की निचली पंक्ति में व्यक्त कमांड निम्न प्रकार से लिखेंगे:

गुणा 3 7 11

अब प्रोग्राम के दो सरल उदाहरण देखते हैं:

प्रोग्राम 1

1) जोड़ 4 5 4
2) गुणा 4 4⟶
3) सं०स० 1
4) 0
5) 1

मशीन के प्रथम पाँच खंदों में ये प्रत्तांक अभिलिखित हैं; देखें कि वह किस तरह काम करती है।

1-ला कमांड: 4-थे व 5-वें खंदों में लिखी गयी संख्याओं को जोड़ना और परिणाम को पुनः 4-थे खंदे में भेजना (4-थे खंदे में पहले जो कुछ लिखा हुआ था, उसकी जगह पर)। इस प्रकार मशीन 4-थे खंदे में संख्या $0+1=1$ लिखेगी। पहले कमांड के बाद 4-थे तथा 5-वें खंदे में निम्न संख्याएं लिखी होंगी:

4) 1,
5) 1.

2-रा कमांड: 4-थे खंदे में स्थित संख्या को स्वयं से गुणा करना (अर्थात् उसका वर्ग निकालना) और परिणाम, अर्थात् 1^2 कार्ड पर छापना (तीर के चिन्ह का अर्थ है तैयार परिणाम बाहर देना)।

3-रा कमांड: संचालन सपुर्द – 1-ले खंदे को। इसका अर्थ है कि सभी कमांड फिर से उसी क्रम में दुहराये जायें। अतः फिर से 1-ला कमांड शुरू होता है।

1-ला कमांड: 4-थे और 5-वें खंदों में स्थित संख्याओं को जोड़ना और परिणाम पुनः 4-थे खंदे में लिखना। फलस्वरूप 4-थे खंदे में संख्या $1+1=2$ होगी:

4) 2,

5) 1.

2-रा कमांड: 4-थे खंदे में स्थित संख्या का वर्ग निकालना और परिणाम, अर्थात 2^2 कार्ड पर लिखना (तीर का अर्थ है–परिणाम बाहर देना)।

3-रा कमांड: संचालन सपुर्द–1-ले खंदे को (अर्थात् फिर से 1-ले कमांड की ओर वापसी)।

1-ला कमांड: संख्या $2+1=3$ को 4-थे खंदे में भेजना:

4) 3,

5) 1.

2-रा कमांड: संख्या 3^2 को कार्ड पर लिखना।

3-रा कमांड: 1-ले खंदे को कंचालन सपुर्द, इत्यादि।

हम देखते हैं कि मशीन एक के बाद एक पूर्ण संख्याओं का वर्ग निकाल निकाल कर कार्ड पर लिखती जा रही है। ध्यान दें कि हर बार हाथ से नयी संख्या नहीं लिखनी पड़ती; मशीन स्वयं क्रम से पूर्ण संख्याएं चुनती जाती है और उनका वर्ग कलित करती जाती है। इस प्रोग्राम पर काम करती हुई मशीन कुछेक सेकेंड (या सेकेंड के कुछ अंशों में ही) सभी पूर्ण संख्याओं (जैसे 1 से 10 000 तक) का वर्ग ज्ञात कर ले सकती है।

यह बता दूँ कि पूर्ण संख्याओं का वर्ग निकालने के लिये प्रोग्राम वास्तविकता में ऊपर दिये गये प्रोग्राम से कुछ जटिल होता है। विशेषकर 2-रा कमांड अधिक जटिल होता है। बात यह है कि कार्ड पर तैयार परिणाम लिखने में कई गुणा अधिक समय लगता है बनिस्बत कि सक्रिया संपन्न करने में। इसलिये तैयार परिणाम पहले 'स्मृति' के किसी खाली खंदे में 'याद' कर लिया जाता है, फिर (बिना जल्द-

बाजी के) कार्ड पर लिखा जाता है। इस तरह, पहला अंतिम परिणाम 'स्मृति' के 1-ले खाली खंदे में 'याद' किया जाना चाहिये, दूसरा परिणाम – 2-रे खाली खंदे में, तीसरा – 3-रे में, आदि। उपरोक्त सरलीकृत प्रोग्राम में इस बात को ध्यान में नहीं रखा गया है।

इसके अतिरिक्त, मशीन वर्ग निकालने का काम देर तक नहीं कर सकती – 'स्मृति' के खंदे काफी नहीं पड़ेंगे, – और ठीक-ठीक अंदाज लगाना कि मशीन वर्गों की आवश्यक संख्या अब प्राप्त कर चुकी है, ताकि मशीन ऐन वक्त रोक दी जाये, – संभव नहीं है (क्योंकि मशीन एक सेकेंड में हजारों संक्रियाएं संपन्न करती है!)। इसी लिये ऐन वक्त मशीन रोकने के लिये विशेष कमांड की व्यवस्था रहती है। उदाहरणार्थ, प्रोग्राम इस तरह बनाया जा सकता है कि मशीन 1 से 10 000 तक की सभी पूर्ण संख्याओं का वर्ग निकाल कर स्वतः रुक जाये।

अधिक जटिल प्रकार के भी कमांड हैं, पर उन्हें हम नहीं देखेंगे।

1 से 10 000 तक की सभी पूर्ण संख्याओं का वर्ग कलित करने के लिये वास्तविक प्रोग्राम कुछ इस प्रकार का होता है:

प्रोग्राम $1a$

1) जोड़	8	9	8
2) गुणा	8	8	10
3) जोड़	2	6	2
4) ब०सं०स०	8	7	1
5) रुक			
6)	0	0	1
7) 10000			
8) 0			
9) 1			

10) 0
11) 0
12) 0

. . . .

प्रथम दो कमांड उपरोक्त सरलीकृत प्रोग्राम के प्रथम दो कमांडों से भिन्न नहीं हैं। इनका पालन करने के बाद 8-वें, 9-वें और 10-वें खंदों में निम्न संख्याएं होंगी :

8) 1
9) 1
10) 1^2

तीसरा कमांड बहुत ही रोचक है : 2-रे और 6-ठे खंदे में जो कुछ है, उसे जोड़कर परिणाम 2-रे खंदे में लिखना, जिसके बाद 2-रे खंदे में अभिलेख होगा :

2) गुणा 8 8 11.

जैसा कि देखते हैं, तीसरा कमांड पूरा करने के बाद दूसरा कमांड बदल जाता है, या और सही कहें, तो 2-रे कमांड का एक पता बदल जाता है। नीचे हम स्पष्ट करेंगे कि ऐसा क्यों किया जाता है।

चौथा कमांड : बशर्त्त संचालन सपुर्द (पिछले प्रोग्राम में 3-रे कमांड की जगह)। यह कमांड निम्न प्रकार से पूरा होता है : यदि 8-वें खंदे में स्थित संख्या 7-वें खंदे की संख्या से कम है, तो संचालन 1-ले खंदे को सपुर्द किया जाता है; विपरीत स्थिति में अगला (अर्थात् 5-वां) कमांड पूरा किया जाता है। हमारी स्थिति में सचमुच $1<10\,000$ है, इसलिये संचालन 1-ले खंदे को सपुर्द हो जाता है। अतः फिर से 1-ले कमांड का पालन शुरू होता है।

1-ला कमांड पूरा होने पर 8-वें खंदे में संख्या 2 होगी।

अब दूसरे कमांड का रूप है:

2) गुणा 8 8 11,

जिसका अर्थ है कि संख्या 2^2 को 11-वें खंदे में भेजा जाये। अब समझ में आता है कि पहले 3-रा कमांड क्यों पूरा किया गया था: नयी संख्या, अर्थात् 2^2 को 10-वें खंदे में नहीं जाना चाहिये, क्योंकि वह खाली नहीं है; उसे अगले, अर्थात् 11-वें खंदे में जाना चाहिये। 1-ला और 2-रा कमांड पूरा होने के बाद हमारे पास निम्न संख्याएं होंगी

8) 2; 9) 1; 10) 1^2; 11) 2^2.

तीसरा कमांड पूरा होने पर 2-रे खंदे में निम्न अभिलेख होगा:

गुणा 8 8 12,

अर्थात् मशीन इस बात के लिये तैयार हो चुकी है कि वह नया परिणाम अगले, अर्थात् 12-वें खंदे में लिखे। चूंकि 8-वें खंदे में अब भी 9-वें खंदे से कम संख्या है, इसलिये 4-थे कमांड का अर्थ है कि संचालन पुनः 1-ले खंदे को सौंप दिया जाये।

अब 1-ला और 2-रा कमांड पूरा होने पर मिलेगा:

8) 3; 9) 1; 10) 1^2; 11) 2^2; 12) 3^2.

मशीन कब तक इस प्रोग्राम पर वर्ग निकालती रहेगी? – जबतक 8-वें खंदे में संख्या 10 000 नहीं आ जाये, अर्थात् जबतक 1 से 10 000 तक की सभी पूर्ण संख्याओं के वर्ग कलित नहीं हो जायेंगे। इसके बाद 4-था कमांड 1-ले खंदे को संचालन सपुर्द नहीं करेगा (क्योंकि 8-वें खंदे में स्थित संख्या 7-वें खंदे में स्थित संख्या से कम नहीं, उसके

बराबर होगी), अर्थात् 4-थे कमांड के बाद मशीन 5-वाँ कमांड पूरा करेगी: रुक (मशीन रुक जायेगी)।

अब एक अधिक जटिल प्रोग्राम का उदाहरण देखते हैं: समीकरण-तंत्र हल करने के लिये। हम लोग सरलीकृत प्रोग्राम ही देखेंगे। यदि इच्छा होगी, तो पाठक स्वयं मनन करके देख लेंगे कि अपने पूर्ण रूप में यह प्रोग्राम कैसा होगा।

मान लें कि निम्न समीकरण-तंत्र प्रत्त है:

$$\begin{cases} ax+by=c, \\ dx+ey=f. \end{cases}$$

यह तंत्र हल करना कठिन नहीं है:

$$x=\frac{ce-bf}{ae-bd}, \quad y=\frac{af-cd}{ae-bd}$$

संगुणक a, b, c, d, e, f के सांख्यिक मान प्रत्त होने पर यह तंत्र हल करने में आपको शायद दसेक सेकेंड भर लगेंगे। मशीन एक सेकेंड में ऐसे हजारों तंत्र हल कर सकती है।

तदनुरूप प्रोग्राम देखें। यह मान लेते हैं कि एक साथ कई तंत्र दिये गये हैं:

जिनके संगुणकों के सांख्यिक मान हैं $a, b, c, d, e, f, a', b', \ldots,$

$$\begin{cases} ax+by=c, \\ dx+ey=f. \end{cases} \quad \begin{cases} a'x+b'y=c', \\ d'x+e'y=f'. \end{cases} \quad \begin{cases} \ldots \end{cases}$$

तदनुरूप प्रोग्राम है:

प्रोग्राम 2

1) × 28 30 20	14) + 3 19 3	26) a
2) × 27 31 21	15) + 4 19 4	27) b
3) × 26 30 22	16) + 5 19 5	28) c
4) × 27 29 23	17) + 6 19 6	29) d
5) × 26 31 24	18) सं० स० 1	30) e
6) × 28 29 25	19) 6 6 0	31) f
7) — 20 21 20	20) 0	32) a'
8) — 22 23 21	21) 0	33) b'
9) — 24 25 22	22) 0	34) c'
10) 20 21 →	23) 0	35) d'
11) : 22 21 →	24) 0	36) e'
12) + 1 19 1	25) 0	37) f'
12) + 2 19 2		38) a''

1-ला कमांड: 28-वें और 30-वें खंदों में स्थित संख्याओं को आपस में गुणा करके परिणाम 20-वें खंदे में भेजना। अन्यत:, 20-वें खंदे में संख्या ce लिखी जायेगी।

2-रे से 6-ठे कमांड भी इसी तरह पूरे किये जाते हैं। इनके पूरे होने पर 20-वें से 25-वें खंदों में निम्न संख्याएं होंगी:

20) ce
21) bf
22) ae
23) bd
24) af
25) cd

7-वां कमांड : 20-वें खंदे में स्थित संख्या में से 21-वें खंदे की संख्या घटाना और परिणाम (अर्थात् $ce - bf$) पुनः 20-वें खंदे में लिखना।

8-वां और 9-वां कमांड भी इसी तरह पूरे होते हैं, जिसके फलस्वरूप 20-वें, 21-वें, 22-वें खंदों में निम्न संख्याएं होंगी :

20) $ce - bf$
21) $ae - bd$
22) $af - cd$

10-वां और 11-वां कमांड : निम्न भागफल प्राप्त होते हैं :

$$\frac{ce-bf}{ae-bd} \quad \text{तथा} \quad \frac{af-cd}{ae-bd},$$

और कार्ड पर अंकित हो जाते हैं (अर्थात् मशीन हमें तैयार परिणाम या उत्तर दे देती है)। प्रथम समीकरण-तंत्र की अज्ञात राशियों के मान यही हैं।

इस प्रकार, प्रथम तंत्र हल हो चुका है। फिर आगे के कमांड किसलिये हैं? प्रोग्राम में आगे के कमांडों (12-वें से 19-वें खंदों) का उद्देश्य यही है कि मशीन अगला समीकरण-तंत्र हल करने को तैयार हो जाये। देखें कि यह कैसे होता है। 10-वें से 17-वें कमांडों का अर्थ है कि 1-ले से 6-ठे खंदों में 19-वें खंदे का भी अभिलेख शामिल हो जाता है, जिसके फलस्वरूप परिणाम पुनः 1-ले से 6 ठे खंदों में ही रह जाते हैं। इस प्रकार, 17-वां कमांड पूरा होने पर प्रथम छः खंदों में निम्न अभिलेख होगा :

1) × 34 36 20
2) × 33 37 21
3) × 32 36 22

4) × 33 35 23
5) × 32 37 24
6) × 34 35 25

18-वां कमांड: संचालन पहले खंदे को सपुर्द।

प्रथम छः खंदों का नया अभिलेख पुराने से किस बात में भिन्न है? इसी में कि इन खंदों में प्रथम दो पतों का नंबर पहले की तरह 26 से 31 तक नहीं बल्कि 32 से 37 तक है। अन्यतः, मशीन पुनः वे संक्रियाएं संपन्न करेगी, लेकिन इसके लिये संख्याएं 26-वें – 31-वें खंदों से नहीं, बल्कि 32-वें – 37-वें खंदों से लेगी, जिनमें दूसरे समीकरण-तंत्र के संगुणक अंकित हैं। फलस्वरूप, मशीन दूसरा समीकरण-तंत्र हल कर लेगी। दूसरा समीकरण-तंत्र हल करने के बाद मशीन तीसरा, चौथा आदि तंत्र हल करती जायेगी।

जो कुछ कहा गया है, इससे स्पष्ट है कि सही 'प्रोग्राम' बनाना कितना जरूरी होता है। आखिर मशीन 'खुद' तो कुछ भी नहीं करना 'जानती' है। वह सिर्फ दिये गये प्रोग्राम को निभा सकती है। ऐसे भी प्रोग्राम हैं, जिनसे मूल, लगरथ, ज्या के मान कलित होते हैं, उच्च घातों के समीकरण हल होते हैं, आदि। हम ऊपर बता चुके हैं कि शतरंज खेलने और विदेशी भाषा से अनुवाद करने के लिये भी प्रोग्राम हैं। निस्संदेह, प्रश्न जितना जटिल होगा, तदनुरूप प्रोग्राम भी उतना ही जटिल होगा।

अंत में एक बात और बता दें कि प्रोग्रामक प्रोग्राम भी होते हैं। ये ऐसे प्रोग्राम हैं, जिनकी सहायता से मशीन विचाराधीन प्रश्न हल करने के लिये प्रोग्राम स्वयं बना ले सकती है। इससे प्रोग्राम बनाने का काम भी काफी हल्का हो जाता है, जो अक्सर एक बहुत ही मेहनत वाला काम है।

अध्याय 3

अंकगणित के सहायतार्थ

अंकगणित अपने कुछ कथनों को निजी साधनों से सिद्ध नहीं कर पाता। ऐसी परिस्थितियों में उसे बीजगणित की व्यापककारी विधियों की सहायता लेनी पड़ती है। बीजगणित द्वारा सिद्ध की जाने वाली ऐसी अंकगणितीय बातों में निम्न की गणना होती है: संक्रियाओं को संक्षिप्त विधि से संपन्न करने के कई नियम, कुछ संख्याओं की रोचक विशेषताएं, विभाज्यता के लक्षण, आदि। प्रस्तुत अध्याय में इसी तरह के प्रश्नों पर विचार होगा।

क्षणिक गुणन

तेजी से संक्रियाएं संपन्न करने वाले लोग अक्सर बीजगणितीय रूपांतरणों का सहारा लेते हैं, जो कलन-कार्य काफी सरल कर देते हैं। उदाहरणार्थ, 988^2 निम्न प्रकार से कलन करते हैं:

$$988 \cdot 988 = (988+12) \cdot (988-12) + 12^2 =$$
$$= 1000 \cdot 976 + 144 = 976\ 144$$

समझना आसान है कि कलनकर्त्ता ने इस उदाहरण में निम्न बीजगणितीय रूपांतरण की सहायता ली है:

$$a^2 = a^2 - b^2 + b^2 = (a+b)(a-b) + b^2.$$

जबानी हिसाब में हम इस सूत्र का सफलतापूर्वक उपयोग कर सकते हैं।

उदाहरण :

$$27^2=(27+3)(27-3)+3^2=729,$$
$$63^2=66\cdot60+3^2=3969,$$
$$18^2=20\cdot16+2^2=324,$$
$$37^2=40\cdot34+3^2=1369,$$
$$48^2=50\cdot46+2^2=2304,$$
$$54^2=58\cdot50+4^2=2916.$$

आगे, $986\cdot997$ का गुणा निम्न विधि से संपन्न होता है :

$$986\cdot997=(986-3)\cdot1000+3\cdot14=983\,042.$$

यह विधि किस बात पर आधारित है? गुणनखंडों को निम्न रूप में प्रस्तुत करते हैं :

$$(1000-14)\cdot(1000-3)$$

और इन दुपदों को बीजगणितीय नियमों से गुणित करते हैं :

$$1000\cdot100-1000\cdot14-1000\cdot3+14\cdot3.$$

निम्न रूपांतरण करते हैं :

$$1000(1000-14)-1000\cdot3+14\cdot3=$$
$$1000\cdot986-1000\cdot3+14\cdot3=1000(986-3)+14\cdot3$$

अंतिम पंक्ति ही कलनकर्त्ता की विधि व्यक्त करती है।

दो तीन-अंकी संख्याओं के गुणन की विधि भी रोचक है, जिनमें दहाई के अंक समान हैं और इकाइयों का योगफल 10 है। उदाहरणार्थ, गुणा

$$783\cdot787$$

निम्न प्रकार से संपन्न होता है:

$$78 \cdot 79 = 6162, \quad 3 \cdot 7 = 21$$

उत्तर:

$$616221.$$

इस विधि का आधार निम्न रूपांतरण से स्पष्ट होता है:

$$(780 + 3)(780 + 7) =$$
$$= 780 \cdot 780 + 780 \cdot 3 + 780 \cdot 7 + 3 \cdot 7 =$$
$$= 780 \cdot 780 + 780 \cdot 10 + 3 \cdot 7 =$$
$$= 780(780 + 10) + 3 \cdot 7 = 780 \cdot 790 + 21 =$$
$$= 616200 + 21.$$

ऐसे गुणन की अन्य विधि और भी सरल है:

$$783 \cdot 787 = (785 - 2)(785 + 2) = 785^2 - 4 = 616225 - 4 =$$
$$= 616221$$

इस उदाहरण में हमें संख्या 785 का वर्ग निकालना पड़ा है।

5 से अंत होने वाली संख्याओं का वर्ग निकालने के लिये निम्न विधि अत्यंत सुविधाजनक हैं:

35^2; $3 \cdot 4 = 12$. उत्तर: 1225.

65^2; $6 \cdot 7 = 42$. उत्तर: 4225.

75^2; $7 \cdot 8 = 56$. उत्तर: 5625.

नियम यही है कि दहाई की संख्या में उससे इकाई अधिक की संख्या से गुणा करते हैं और गुणनफल के साथ (अंत में) 25 लिख देते हैं।

विधि का आधार निम्न है। यदि दहाई के स्थान पर संख्या a है तो पूरी संख्या को निम्न रूप में व्यक्त कर सकते हैं:

$$10a + 5$$

दुपद के वर्ग की तरह ही इस दुपद का वर्ग होगा :

$$100a^2+100a+25=100a(a+1)+25.$$

व्यंजन $a(a+1)$ ही दहाई की संख्या और उससे इकाई अधिक की संख्या का गुणन है। किसी संख्या को 100 से गुणा करके उसमें 25 जोड़ने का मतलब यही हुआ कि उस संख्या के अंत में 25 लिख दिया गया है।

इसी विधि से पूर्णांक और $\frac{1}{2}$ से बनी संख्याओं का वर्ग निकालने की विधि सामने आती है। उदाहरणार्थ :

$$\left(3\frac{1}{2}\right)^2=3.5^2=12.25=12\frac{1}{4},$$

$$\left(7\frac{1}{2}\right)^2=56\frac{1}{4},\ \left(8\frac{1}{2}\right)^2=72\frac{1}{4}$$ आदि।

अंक 1, 5 और 6

शायद आप सबों ने ध्यान दिया होगा कि इकाई या पंजे से अंत होने वाली संख्याओं को आपस में गुणा करने पर उसी अंक से अंत होने वाली संख्या मिलती है। लेकिन यह बहुत कम लोग जानते होंगे कि यह बात अंक 6 के साथ भी है। इसीलिये तो छक्के से अंत होने वाली संख्या का कोई भी घात छक्के से ही समाप्त होता है।

उदाहरण : $46^2=2116$; $46^3=97\,336$

अंक 1,5 तथा 6 की इस रोचक विशेषता को बीजगणितीय विधियों से सिद्ध किया जा सकता है। यहां हम 6 के लिये देखेंगे।

छक्के से अंत होने वाली संख्याएं निम्न रूप में व्यक्त हो सकती हैं :

$$10a+6,\quad 10b+6$$ आदि,

जहां a व b कोई पूर्ण संख्याएं हैं।

ऐसी दो संख्याओं का गुणनफल होगा :

$$100ab+60b+60a+36=10(10ab+6b+6a)+30+6=$$

$$=10(10ab+6b+6a+3)+6.$$

जैसा कि हम देख रहे हैं, गुणनफल दहलों की एक संख्या $(10ab+6b+6a+3)$ और 6 से मिलकर बनी है, जो जाहिर है कि अंत में 6 ही होगा।

यही विधि 1 और 5 के लिये सिद्ध करने में भी प्रयुक्त हो सकती है।

इन बातों के आधार पर हम कह सकते हैं कि (उदाहरण के लिये)

386^{2567} के अंत में 6 है,
815^{723} के अंत में 5 है,
491^{1732} के अंत में 1 है, आदि।

संख्याएं 25 और 76

इस तरह की दो-अंकी संख्याएं भी हैं, जिनमें संख्या 1, 5, 6, जैसे ही गुण होते हैं। ये हैं संख्या 25 और – बहुतों को विश्वास नहीं होगा, – संख्या 76, अर्थात् 76 से समाप्त होने वाली किन्हीं दो संख्याओं का गुणनफल 76 से ही समाप्त होगा।

इसे सिद्ध करते हैं। ऐसी संख्याओं के लिये व्यापक व्यंजन हैं :

$$100a+76, \quad 100b+76 \quad \text{आदि।}$$

इस तरह की दो संख्याओं को गुणा करने पर मिलेगा :

$$10000ab+7600b+7600a+5776=$$
$$10000ab+7600b+7600a+5700+76=$$
$$=100(100ab+76b+76a+57)+76.$$

बात सिद्ध हो गयी : गुणनफल एक ऐसी संख्या है, जिसका अंत 76 से होता है।

इससे निष्कर्ष निकलता है कि 76 से अंत होने वाली किसी संख्या का कोई भी घात एक वैसी ही संख्या है :

$376^2=141376$, $576^3=191102976$ आदि।

अनंत 'संख्याएं'

अंकों की अधिक लंबी लड़ियां भी हैं, जो किन्हीं संख्याओं के अंत में होने पर उनके गुणनफल में भी सुरक्षित रहती हैं। अंकों की ऐसी लड़ियों की संख्या, जैसा कि हम सिद्ध करेंगे, अनंत है।

यह गुण रखने वाली दो अंकों की लड़ियों से हम परिचित हैं– ये हैं 25 और 76। तीन अंकों की ऐसी लड़ी ढूंढ़ने के लिये संख्या 25 या 76 के आरंभ में ऐसा अंक लिखना चाहिये कि प्राप्त होने वाली तीन अंकों की लड़ी में भी विचाराधीन गुण उपस्थित हो।

संख्या 76 के आरंभ में कौनसा अंक लिखा जाये? इसे k से सांकेतित करते हैं। तब इष्ट तीन-अंकी संख्या का रूप होगा :

$$100k+76.$$

इस लड़ी से अंत होने वाली संख्याओं के व्यापक व्यंजन होंगे :

$1000a+100k+76$, $1000b+100k+76$ आदि।

इस तरह की दो संख्याओं का गुणनफल होगा :

$$1\,000\,000ab+100\,000ak+100\,000bk+76\,000a+ 76\,000b+10\,000k^2+15\,200k+5776.$$

इस व्यंजन में अंतिम दो पदों को छोड़कर बाकी सभी के अंत में कम से कम तीन शून्य जरूर हैं। इसलिये गुणनफल के अंत में $100k+76$ होगा, यदि अंतर

$$15200k+5776-(100k+76)=15100k+5700= 15000k+5000+100(k+7)$$

संख्या 1 000 से विभाज्य है। स्पष्ट है कि यह तभी संभव है, जब $k=3$ है।

इस प्रकार, अंकों की इष्ट लड़ी का रूप 376 है। इसीलिये संख्या 376 का कोई भी घात 376 से ही अंत होता है। उदाहरणार्थ :

$$376^2=141376.$$

अब यदि इसी गुण से संपन्न चार अंकों की लड़ी ढूंढ़ना चाहेंगे, तो हमें 376 के आरंभ में एक और अंक लिखना होगा। इस अंक को l से द्योतित करके हमें निम्न प्रश्न हल करना होगा : l का मान क्या हो कि गुणनफल

$$(10\,000a+1\,000l+376)(10\,000b+1\,000l+376)$$

के अंत में $1\,000l+376$ हो?

यदि इस गुणन में कोष्ठक तोड़े जायें और 4 या अधिक शून्यों से समाप्त होने वाले सभी पदों को हटा दिया जाये, तो निम्न पद बच जायेंगे :

$$752\,000l+141376.$$

गुणनफल के अंत में $1\,000l+376$ होगा, यदि अंतर

$$752\,000l+141\,376-(1\,000l+376)=751\,000l+141\,000$$
$$=(750\,000l+140\,000)+1\,000(l+1)$$

संख्या 10 000 से विभाज्य है। स्पष्ट है कि यह सिर्फ $l=9$ की स्थिति में संभव है।

चार अंकों की इष्ट लड़ी 9 376 है।

इसके आरंभ में एक और अंक लिखकर पाँच अंकों की लड़ी प्राप्त कर सकते हैं, पर इसके लिये ऊपर के विचार-क्रम का अनुसरण करना पड़ेगा। हमें 09 376 मिलेगा। अगली बार अंकों की लड़ी 109 376 मिलेगी, फिर 7 109 376 मिलेगा, आदि।

बायीं ओर अंक लिखते जाने का सिलसिला अनंत बार चलाया जा सकता है। फलस्वरूप हमें 'संख्या' मिलेगी, जिसमें अनंत अंक होंगे :

$$\ldots 7\,109\,376.$$

इस तरह की संख्याओं को सामान्य नियमों के अनुसार जोड़ा और घटाया जा सकता है, क्योंकि ये दायें से बायें लिखी जाती हैं और इन्हें ऊपर-नीचे लिखकर जोड़ने की क्रिया भी दायें से बायीं ओर चलती है। अतः ऐसी दो संख्याओं के जोड़ और घटाव में एक के बाद एक अनंत अंक कलित किये जा सकते हैं।

दिलचस्प यह है कि ऊपर लिखी अनंत 'संख्या' भी समीकरण

$$x^2=x$$

को संतुष्ट करती है, यद्यपि यह असंभव लगता है। लेकिन सचमुच ही इस 'संख्या' का वर्ग (स्वयं से गुणा) 76 से अंत होने वाली संख्या है, क्योंकि हर संगुणक के अंत में 76 है; इसी कारणवश लिखी

गयी संख्या के वर्ग के अंत में 376 होता है, 9 376 होता है, आदि। यदि दूसरी तरह कहें, तो $x = \ldots 7\,109\,376$ होने पर 'संख्या' x^2 के एक-एक अंक कलित करते जाने पर हम वे ही अंक प्राप्त करेंगे, जो x में होंगे, क्योंकि $x^2 = x$ है।

हमने अंकों की ऐसी लड़ियां देखीं, जो 76 से अंत होती हैं।[1] यदि उपरोक्त विचारक्रम 5 से अंत होने वाली लड़ियों के लिये लागू किया जाये, तो हमें अंकों की निम्न लड़ियां मिलेंगी:

5, 25, 625, 0 625, 90 625, 890 625, 2 890 625 आदि।

परिणामस्वरूप हम निम्न अनंत 'संख्या' लिख सकेंगे:

$$\ldots 2\,890\,625,$$

जो समीकरण $x^2 = x$ को संतुष्ट करती है। सिद्ध किया जा सकता है कि यह अनंत 'संख्या' निम्न के 'बराबर' है:

$$\left(\left((5^2)^2\right)^2\right)^2.$$

प्राप्त रोचक परिणाम अनंत 'संख्याओं' की भाषा में निम्न प्रकार से व्यक्त की जा सकती है: समीकरण $x^2 = x$ के (सामान्य $x = 0$ और $x = 1$ के अतिरिक्त) दो 'अनंत' हल हैं:

---

[1] ध्यान दें कि दो श्रेणियों का अंक भी ऊपर दिये गये विचार-क्रम से प्राप्त हो सकता है: यह प्रश्न हल करना काफी रहेगा कि अंक 6 के पहले कौनसा अंक लिखा जाये कि इससे प्राप्त दो श्रेणियों वाले अंक में भी विचाराधीन गुण मौजूद हो। इसीलिये 6 के पहले एक-एक अंक ढूंढ़ते हुए भी संख्या $\ldots 7\,109\,376$ प्राप्त की जा सकती है।

$x = \dots 7\,109\,376$ और $x = \dots 2\,890\,625.$

अन्य हल (दशभू गणना-प्रणाली में) नहीं हैं।[1)]

कितने दिये?

एक प्राचीन लोक-प्रश्न

एक बार की बात है, दो मवेशी-पालकों ने बैलों का अपना सामूहिक झुंड बेच दिया; हर बैल के लिये इतने रूबल मिले, जितने बैल उस झुंड में थे। प्राप्त धनराशि से उन्होंने 10 रूबल प्रति भेड़ की दर से भेड़ों का एक झुंड और एक मेमना खरीदा। झुंड को आधा-आधा बांटने पर एक मवेशी-पालक को एक भेड़ अधिक मिला; दूसरे ने मेमना ले लिया। बराबरी के लिये पहले वाले ने दूसरे को कुछ पूरे रूबल दिये। कितने दिये?

हल

प्रश्न 'बीजगणितीय भाषा' में सीधे नहीं व्यक्त होता, इसके लिये समीकरण नहीं बनाया जा सकता। इसे खास ढंग से, या यूं कहें कि स्वतंत्र गणितीय मनन से हल करना पड़ेगा। पर यहां भी बीजगणित महत्त्वपूर्ण रूप से अंकगणित की सहायता करता है।

[1)] अनंत 'संख्याएं' सिर्फ दशभू प्रणाली में ही नहीं, अन्य गणना-प्रणालियों में भी मिल सकती हैं। आधार p वाली विचाराधीन गणना प्रणाली में ऐसी संख्याओं को p-ऐडिक संख्याएं कहते हैं।

खरीदे गये झुंड की कीमत (रूबलों में) एक पूर्ण वर्ग है, क्योंकि वह n रूबल प्रति बैल की दर से n बैल बेचने पर प्राप्त धन से खरीदा गया है। एक मवेशी-पालक को एक भेड़ अधिक मिला है, अतः भेड़ों की संख्या विषम है और इसीलिये n^2 में दशकों की संख्या भी विषम है (भेड़ दस-दस रूबल में खरीदे गये हैं)। फिर इकाई के स्थान पर कौनसा अंक है?

सिद्ध किया जा सकता है कि यदि पूर्ण वर्ग में दहलों (या दशकों, दस-दस इकाइयों के समाहारों) की संख्या विषम है, तो इकाई के स्थान पर सिर्फ अंक 6 हो सकता है।

सचमुच, a दशकों और b इकाइयों से बनी संख्या का पूर्ण वर्ग, अर्थात् $(10a+b)^2$ बराबर होगा

$$100a^2+20ab+b^2=(10a^2+2ab)\cdot 10+b^2.$$

इसमें दशकों की संख्या $10a^2+2ab$ है, लेकिन b^2 में भी दशकों की कोई संख्या जरूर होगी। $10a^2+2ab$ में 2 से भाग दिया जा सकता है, अतः यह एक सम संख्या है। इसीलिये $(10a+b)^2$ में उपस्थित दशकों की संख्या तभी विषम हो सकती है जब b^2 में उपस्थित दशकों की संख्या भी विषम होगी। याद करें कि b^2 क्या है। यह इकाइयों की संख्या का वर्ग है, अर्थात् निम्न 10 संख्याओं में से कोई एक है:

$$0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81.$$

इनके बीच दशकों की विषम संख्या सिर्फ 16 और 36 में है, और ये दोनों ही 6 से अंत होते हैं। अतः पूर्ण वर्ग

$$100a^2+20ab+b^2$$

में दशकों की संख्या विषम तभी हो सकती है, यदि उसके अंत में 6 है।

अब प्रश्न का उत्तर सरलतापूर्वक दिया जा सकता है। स्पष्ट है कि मेमने की कीमत 6 रूबल थी। जिस मवेशी पालक को मेमना मिला, उसे दूसरे से 4 रूबल कम मिला। अतः बराबरी के लिये उसे और 2 रूबल मिलने थे।

अतिरिक्त भेड़ वाले ने मेमने वाले को 2 रूबल दिये।

11 से विभाज्यता

बीजगणित उन लक्षणों को ढूंढ़ने का काम बहुत हल्का कर देता है, जिनकी सहायता से बिना भाग दिये निर्धारित किया जा सकता है कि कोई संख्या किसी दी हुई संख्या से बिना शेष विभाजित होती है या नहीं। 2,3,4,5,6,8,9,10 से (बिना शेष) विभाज्यता के लक्षण सभी जानते हैं। यहां 11 से विभाज्यता के लक्षण ज्ञात करते हैं; यह सरल भी है और व्यावहारिक भी।

मान लें कि बहु-अंकी संख्या N में इकाइयों की संख्या a है, दहाइयों की संख्या b है, सैकड़ों की संख्या c है, हजारों की संख्या d है, आदि।

$$N = a+10b+100c+1000d+\ldots=a+10(b+10c+100d+\ldots),$$

जहां बिन्दु आगे की श्रेणियों का योगफल द्योतित करते हैं। संख्या N में से ग्यारह की उत्वर्त संख्या (अर्थात् ग्यारह गुनी बड़ी संख्या) $11(b+10c+100d+\ldots)$ घटाते हैं। सरलता से देख सकते हैं कि इनके अंतर

$$a-b-10(c+10d+\ldots)$$

में 11 से भाग देने पर शेष उतना ही मिलेगा, जितना N में भाग देने पर। इस अंतर में ग्यारह का उत्वर्त $11(c+10d+\ldots)$ जोड़ने पर जो संख्या

$$a-b+c+10(d+\ldots)$$

मिलेगी, उसमें भी 11 से भाग देने पर उतना ही शेष मिलेगा, जितना N में भाग देने पर। इसमें से 11 का उत्वर्त $11(d+\ldots)$ घटाते हैं और इस तरह की प्रक्रिया जारी रखते हैं, जिसके फलस्वरूप निम्न संख्या मिलेगी :

$$a-b+c-d+\ldots.=(a+c+\ldots)-(b+d+\ldots),$$

जिसमें 11 से भाग देने पर उतना ही शेष बचेगा, जितना N में 11 से भाग देने पर।

इससे किसी संख्या की 11 से विभाज्यता का निम्न लक्षण निष्पादित होता है: इकाई की ओर से विषम श्रेणियों के अंकों को अलग से जोड़िये और सम श्रेणियों के अंकों को अलग से जोड़िये; दोनों योगफलों का अंतर यदि शून्य है या 11 की कोई उत्वर्त संख्या (धन या ऋण) है, तो विचाराधीन संख्या संख्या 11 से विभाज्य है; विपरीत स्थिति में विचाराधीन संख्या को 11 से बिना शेष विभाजित नहीं किया जा सकता।

उदाहरण के लिये संख्या 87 635 064 की जाँच की जाये :

$$8+6+5+6=25,$$
$$7+3+0+4=14,$$
$$25-14=11.$$

इसका मतलब है कि प्रत्त संख्या 11 से विभाज्य है।

11 से विभाज्यता का एक और लक्षण है, जो कम लंबी संख्याओं के लिये सुविधाजनक है: विचाराधीन संख्या में दायें से बायें दो-दो अंक अलग करते हुए उनके ग्रुप बनाते हैं और ग्रुपों की संख्याओं को जोड़ते हैं। यदि योगफल संख्या 11 से बिना शेष विभाजित होता है, तो विचाराधीन संख्या भी 11 से बिना शेष विभाज्य है, अन्यथा नहीं। उदाहरणार्थ, मान लें कि संख्या 528 की जाँच करनी है। संख्या को लकीर से दो ग्रुपों में बाँट लेते हैं (5/28) और दोनों को जोड़ते हैं:

$$5+28=33$$

चूंकि संख्या 33 संख्या 11 से बिना शेष विभाजित होती है, अतः संख्या 528 भी 11 का उत्वर्त है:

$$528:11=48.$$

विभाज्यता के इस लक्षण को सिद्ध करते हैं: बहु-अंकी संख्या N में से दो-दो अंकों को अलग करते हैं, जिससे दो-दो (या एक)[1] अंक वाली संख्याएं मिलती हैं। इन संख्याओं को (दायें से बायें) वर्ण a, b, c आदि से द्योतित करते हैं, अतः संख्या N को निम्न रूप में लिखा सकता है:

$$N=a+100b+10\,000c+\ldots=a+100(b+100c+\ldots).$$

N में से 11 की उत्वर्त संख्या $99(b+100c+\ldots)$ घटाते हैं। प्राप्त संख्या

---

[1] यदि संख्या N में अंकों की संख्या विषम है तो अंतिम (सबसे बायें) ग्रुप में सिर्फ एक अंक की संख्या मिलेगी। इसके अतिरिक्त 03 जैसे ग्रुप को भी एक अंक की संख्या 3 माननी चाहिये।

$$a+(b+100c+...)=a+b+100(c+...)$$

में 11 से भाग देने पर उतना ही शेष मिलता है, जितना N में भाग देने पर। इस संख्या में से 11 का उत्वर्त $99(c+...)$ घटाते हैं। यह प्रक्रिया जारी रखते हुए हम इस निष्कर्ष पर पहुँचते हैं कि 11 से N में भाग देने पर वही शेष मिलता है, जो निम्न संख्या में भाग देने से :

$$a+b+c+...$$

कार का नंबर

प्रश्न

सड़क पर गणित के तीन छात्र घूम रहे थे। अचानक उन्होंने देखा कि एक कार का ड्राइवर कोई दुर्घटना करके भाग गया। कार का (चार-अंकी) नंबर किसी को याद न रहा, पर चूंकि तीनों छात्र गणितज्ञ थे, उनमें से प्रत्येक ने इस चार-अंकी संख्या की एक-एक विशेषता देख ली थी। एक छात्र को याद आया कि प्रथम दो अंक एक जैसे थे। दूसरे ने याद किया कि अंतिम दो अंक भी समान थे। अंत में तीसरे ने बताया कि चार अंकों की यह संख्या एक पूर्ण वर्ग थी। क्या इन सूचनाओं के आधार पर आप कार का नंबर बता सकते हैं?

हल

इष्ट संख्या के प्रथम (और दूसरे) अंक को a से द्योतित करते हैं, तीसरे (और चौथे) को $-b$ से। तब पूरी संख्या होगी

$$1000a+100a+10b+b=1100a+11b=11(100a+b).$$

यह संख्या 11 से विभाज्य है, पर पूर्ण वर्ग होने के नाते इसे 11^2 से भी विभाजित होना चाहिये। अन्यतः, संख्या $100a+b$ भी 11 से विभाज्य है। 11 से विभाज्यता के दोनों लक्षणों में से कोई भी आजमाकर देख लें, पता चलेगा कि संख्या $a+b$ भी 11 से विभाज्य है। लेकिन इसका मतलब है कि

$$a+b=11,$$

क्योंकि हर अंक a, b दस से कम है।

चूंकि संख्या एक पूर्ण वर्ग है, इसलिये इसका अंतिम अंक b निम्न में से कोई एक हो सकता है:

$$0,1,4,5,6,9.$$

इसलिये अंक $a=(11-b)$ के निम्न मान संभव हैं:

$$11, 10, 7, 6, 5, 2.$$

प्रथम दो मान बेकार हैं, अतः निम्न संभावनाएं बचती हैं:

$$b=4, \quad a=7;$$
$$b=5, \quad a=6;$$
$$b=6, \quad a=5;$$
$$b=9, \quad a=2.$$

अतः कार का नंबर निम्न चार संख्याओं के बीच ढूंढनी चाहिये:

7744, 6655, 5566, 2299.

इनमें से अंतिम तीन संख्याएं पूर्ण वर्ग नहीं हैं: संख्या 6655 संख्या 5 से विभाज्य है, पर 25 से नहीं; संख्या 5566 संख्या 2 से विभाज्य है, पर 4 से नहीं; संख्या $2299=121\cdot19$ भी वर्ग नहीं

है। बचती है सिर्फ एक संख्या : $7744=88^2$; प्रश्न का हल यही है।

19 से विभाज्यता

19 से विभाज्यता का निम्न लक्षण सिद्ध करें।

19 से संख्या बिना शेष तभी विभाजित होती है, जब उसमें दशकों की संख्या और इकाइयों की दुगुनी संख्या का योगफल संख्या 19 का उत्वर्त होता है।

हल

किसी भी संख्या N को

$$N=10x+y$$

के रूप में लिखा जा सकता है, जहां x उसमें दहाई की संख्या नहीं, बल्कि दशकों की कुल संख्या है; y इकाइयों की संख्या है। हमें सिद्ध करना है कि N तभी 19 का उत्वर्त हो सकता है, जब

$$N'=x+2y$$

भी 19 का उत्वर्त होता है। इसके लिये N' में 10 से गुणा करते हैं और इस गुणनफल में से N घटाते हैं :

$$10N'-N=10(x+2y)-(10x+y)=19y.$$

इससे स्पष्ट है कि यदि N' उत्वर्त है 19 का, तो

$$N=10N'-19y$$

भी 19 से बिना शेष विभाजित होता है ; और विलोम : यदि N संख्या 19 से बिना शेष विभाजित होता है, तो

$$10N'=N+19y$$

भी 19 का उत्वर्त है; और इससे स्पष्ट है कि N' भी 19 से बिना शेष विभाजित होता है।

मान लें कि हमें संख्या 47 045 881 की जाँच करनी है कि वह 19 से विभाज्य है या नहीं।

उपरोक्त लक्षण क्रमबद्ध रूप से आजमाते जायें:

$$
\begin{array}{r}
4704588|1 \\
+2 \\
\hline
47045|90 \\
+18 \\
\hline
4706|3 \\
+6 \\
\hline
471|2 \\
+4 \\
\hline
47|5 \\
+10 \\
\hline
5|7 \\
+14 \\
\hline
19.
\end{array}
$$

चूंकि 19 से 19 बिना शेष विभाजित होता है, इसलिये संख्याएं 57, 475, 4 712, 47 063, 470 459, 4 704 590, 47 045 881 भी 19 की उत्वर्त हैं।

अतः प्रत्त संख्या 19 से विभाज्य है।

सोफिया जेर्मेन का साध्य

विख्यात फ्रांसीसी गणितज्ञ सोफिया जेर्मेन द्वारा प्रस्तावित एक प्रश्न है:

सिद्ध करें कि a^4+4 प्रकार की कोई भी संख्या एक गुणज संख्या होगी (यदि $a \neq 1$ है)।

हल

प्रमाण निम्न रूपांतरण से निष्पन्न होता है:

$$a^4+4=a^4+4a^2+4-4a^2=(a^2+2)^2-4a^2=$$
$$=(a^2+2)^2-(2a)^2=(a^2+2-2a)(a^2+2+2a).$$

इस तरह हम देखते हैं कि संख्या a^4+4 को दो गुणनखंडों के गुणन के रूप में प्रस्तुत किया जा सकता है, जो उसके (a^4+4 के) अथवा इकाई के[1] बराबर नहीं हैं। अन्य शब्दों में, प्रत्त संख्या गुणज है।

गुणज संख्याएं

ऐसी पूर्ण संख्या, जो स्वयं या इकाई के सिवा किसी अन्य पूर्ण संख्या से बिना शेष विभाजित नहीं होती, रूढ़ संख्या कहलाती है। रूढ़ संख्याओं की संख्या अनंत है।

इनकी शुरूआत संख्या 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, ... से होती है, पर इस क्रम का अंत नहीं हो सकता। गुणज संख्याओं के बीच घुस-घुस कर रूढ़ संख्याएं नैसर्गिक संख्या-क्रम को

---

[1] इकाई के बराबर नहीं है, क्योंकि

$$a^2+2-2a=(a^2-2a+1)+1=(a-1)^2+1\neq 1,$$

यदि $a\neq 1$.

साधारण रूप से गुणज संख्याओं की लंबी पंक्तियों में बांट देती हैं। ये पंक्तियां कितनी लंबी होती हैं? क्या ऐसी भी पंक्ति हो सकती है, जिसमें, उदाहरणार्थ, एक के बाद एक लगातार एक हजार गुणज संख्याएं मौजूद हों, उनके बीच एक भी रूढ़ संख्या नहीं हो?

बात असंभव-सी लगती है, पर यह सिद्ध किया जा सकता है कि रूढ़ संख्याओं के बीच गुणज संख्याओं की किसी भी लंबाई की पंक्ति प्राप्त हो सकती है; ऐसी पंक्तियों की लंबाइयों पर कोई रोक नहीं है: ये एक हजार गुणज संख्याओं की भी हो सकती हैं, एक लाख और एक करोड़ आदि की भी।

सुविधा के लिये हम एक प्रतीक $n!$ (पढ़ें: क्रमगुणित एन) का उपयोग करेंगे जिसका अर्थ है 1 से n तक की सभी संख्याओं का गुणनफल। उदाहरणार्थ, $5!=1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5$.

यहां हम सिद्ध करेंगे कि n लगातार पूर्ण संख्याओं के क्रम

$$[(n+1)!+2],\ [(n+1)!+3],\ [(n+1)!+4], \ldots [(n+1)!+n+1]$$

की सभी संख्याएं गुणज हैं।

ये संख्याएं एक के बाद एक क्रम से आती हैं क्योंकि हर संख्या पिछली से 1 अधिक है। सिद्ध करना है कि ये सभी गुणज हैं।

प्रथम संख्या

$$(n+1)!+2=1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot\ldots\cdot(n+1)+2$$

सम है, क्योंकि इसके दोनों योज्य पदों में गुणनखंड 2 है। 2 से बड़ी कोई भी सम संख्या एक गुणज संख्या है।

दूसरी संख्या

$$(n+1)!+3=1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot\ldots\cdot(n+1)+3$$

भी दो पदों का योगफल है, जिनमें से प्रत्येक में संख्या 3 गुणनखंड के रूप में उपस्थित है, अतः यह संख्या भी गुणज है।

तीसरी संख्या

$$(n+1)!+4=1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot\ldots\cdot(n+1)+4$$

संख्या 4 से बिना शेष विभाज्य है, क्योंकि इसके दोनों पद 4 के उत्वर्त हैं।

इसी तरह अगली संख्या

$$(n+1)!+5$$

के बारे में भी सिद्ध किया जा सकता है कि वह 5 की उत्वर्त है। अन्य शब्दों में, हमारे क्रम की हर संख्या में स्वयं और इकाई के अतिरिक्त एक अन्य गुणनखंड भी मौजूद है, अतः क्रम की हर संख्या गुणजं है।

उदाहरणतया, यदि आप पाँच लगातार गुणज संख्याएं लिखना चाहते हैं, तो ऊपर के क्रम में n की जगह 5 रख लें। आपको निम्न क्रम मिलेगा :

722, 723, 724, 725, 726.

पर यह पाँच लगातार गुणज संख्याओं का एकमात्र क्रम नहीं है। अन्य क्रम भी हैं, उदाहरणार्थ

62, 63, 64, 65, 66.

या इनसे भी छोटी संख्याओं का क्रम है :

24, 25, 26, 27, 28.

अब निम्न प्रश्न हल करें :

दस लगातार गुणज संख्याएं लिखें।

हल

उपरोक्त बातों के आधार पर कह सकते हैं कि पहली संख्या निम्न होगी :

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 10 \cdot 11 + 2 = 39\,816\,802.$$

अतः इष्ट संख्या-क्रम निम्न हो सकती है :

39 816 802, 39 816 803, 39 816 804, आदि।

पर इनसे कहीं छोटी दस गुणज संख्याओं का भी लगातार क्रम संभव है। यथा, दूसरे सैकड़े में ही दस नहीं, तेरह लगातार गुणज संख्याओं का क्रम मिलता है :

114, 115, 116, 117, ..., 126.

रूढ़ संख्याओं की संख्या

गुणज संख्याओं के बड़े से बड़े क्रम का अस्तित्व देखते हुए यह संदेह होने लगता है कि रूढ़ संख्याओं की संख्या अनंत हो भी सकती है या नहीं। इसलिये यहां रूढ़ संख्याओं के क्रम की अंतहीनता सिद्ध करना अनुचित नहीं रहेगा।

यह प्रमाण प्राचीन यूनानी गणितज्ञ युक्लिड ने अपनी विख्यात कृति 'मीमांसा' में दिया था। यह 'विपरीत से सिद्धि' प्रकार का प्रमाण है। मान लें कि रूढ़ संख्याओं का क्रम सांत है और अंतिम रूढ़ संख्या N है। निम्न गुणनफल प्राप्त करते हैं :

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot N = N!$$

और इसमें 1 जोड़ते हैं :

$$N! + 1.$$

पूर्ण संख्या होने के नाते इस संख्या में कम से कम एक रूढ़ गुणन-खंड जरूर होना चाहिये, अर्थात् इसे कम से कम एक रूढ़ संख्या से अवश्य ही विभाज्य होना चाहिये। पर मान्यता के अनुसार कोई भी रूढ़ संख्या N से अधिक नहीं हो सकती। दूसरी ओर से, संख्या $N!+1$ बिना शेष न तो N से विभाज्य है, न N से किसी छोटी संख्या से ही, क्योंकि हर बार शेष 1 अवश्य ही बचेगा।

अतः यह नहीं मानना चाहिये कि रूढ़ संख्याओं का क्रम सांत है: ऐसी मान्यता से अंतर्विरोध उत्पन्न होता है। अतः नैसर्गिक संख्या-क्रम में लगातार गुणज संख्याओं की कितनी भी बड़ी लड़ी क्यों न मिलें, हम कह सकते हैं कि उसके बाद भी रूढ़ संख्याओं के अनंत समूह हैं।

ज्ञात महत्तम रूढ़ संख्या

विश्वास रखना कि रूढ़ संख्याएं यथेष्ट बड़ी हो सकती हैं, —एक बात है और यह जानना कि वे कितनी बड़ी-बड़ी हैं—बिल्कुल दूसरी बात है। नैसर्गिक संख्या रूढ़ है या नहीं, यह जानने के लिये उतना ही अधिक कलन करना पड़ेगा, जितनी बड़ी वह स्वयं होगी। सबसे बड़ी संख्या, जिसे हम आज रूढ़ के रूप में जानते हैं, निम्न है:

$$2^{2281}-1.$$

इस संख्या में दशभू गणना-प्रणाली के कोई सात सौ अंक हैं। जिन कलनों द्वारा इसकी रूढ़ता निर्धारित हुई है, वे आधुनिक कलनक मशीनों से संपन्न किये गये थे (दे० अध्याय 1, 2)।

जिम्मेदारी का हिसाब

कभी-कभी ऐसी अंकगणितीय संक्रियाएं मिलती हैं, जो बीजगणितीय विधियों के बिना सरल नहीं होतीं। यथा:

$$\frac{2}{1+\frac{1}{90000000000}}$$

(ऐसा कलन यह देखने के लिये किया जाता है कि विद्युचुंबकीय तरंगों की तुलना में अत्यल्प वेगों से गतिमान पिंडों के साथ वास्ता पड़ने पर तकनीक सापेक्षता-सिद्धांत की यांत्रिकी की उपेक्षा करके वेग-संयोजन के पुराने नियमों का उपयोग कर सकती है या नहीं। पुरानी यांत्रिकी के अनुसार समान दिशा में दो वेगों v_1 व v_2 के अधीन गतिमान पिंड का वेग $(v_1 + v_2)$ किलोमीटर प्रति सेकेंड होता है। नये सिद्धांत के अनुसार पिंड का वेग होना चाहिये

$$\frac{v_1+v_2}{1+\frac{v_1 v_2}{c^2}}$$ किलोमीटर प्रति सेकेंड,

जहां c निर्वात में प्रकाश-वेग 300 000 km/s है। विशेषकर, एक ही दिशा में 1 km/s के बराबर दो वेगों के अधीन गतिमान पिंड का वेग पुराने नियम के अनुसार 2 km/s होता है और नये नियम के अनुसार ठीक –

$$\frac{2}{1+\frac{1}{90000000000}}$$ किलोमीटर प्रति सेकेंड।

दोनों परिणाम कितने भिन्न हैं? क्या दोनों का अंतर आज के सूक्ष्मतम उपकरणों से भी नापा जा सकता है या नहीं? इसी महत्त्वपूर्ण प्रश्न का उत्तर ढूंढ़ने के लिये उपरोक्त संक्रियाएं संपन्न करनी हैं।)

यह कलन हम दो प्रकार से संपन्न करेंगे : पहले साधारण अंकगणितीय विधि से, फिर बीजगणितीय विधि से। आगे दिये गये अंकों की लंबी कतार पर एक नजर डालना ही काफी रहेगा, जिससे आप बीजगणितीय विधि के लाभ समझ जायेंगे।

पहले हम अपने बहुमंजिले भिन्न को थोड़ा रूपांतरित करते हैं :

$$\frac{2}{1+\frac{1}{90000000000}}=\frac{180000000000}{90000000001}.$$

अब हर में अंश से भाग की क्रिया संपन्न करते है :

```
180 000 000 000 | 90 000 000 001
 90 000 000 001 | 1.999 999 999 977 ......
 89 999 999 9990
 81 000 000 0009
  8 999 999 998 10
  8 100 000 000 09
    899 990 998 010
    810 000 000 009
     899 999 980 010
     810 000 000 009
      899 999 800 010
      810 000 000 009
       899 998 000 010
       810 000 000 009
        899 980 000 010
        810 000 000 009
         899 800 000 010
         810 000 000 009
          898 000 000 010
          810 000 000 009
           880 000 000 010
           810 000 000 009
            700 000 000 010
            630 000 000 007
             70 000 000 003.
```

कलन, जैसा आप देख रहे हैं, कठिन और श्रमसाध्य है, इसमें गलती होने की भी संभावना कम नहीं है। पर प्रश्न हल करने के लिये यह जानना जरूरी है कि किस स्थान पर नहलों का क्रम समाप्त होता है और अन्य अंकों का क्रम शुरू होता है।

अब तुलना करें कि बीजगणित कितनी सरलता से यह कलन संपन्न करता है। इसके लिये वह निम्न सन्निकट समता का उपयोग करता है: यदि a बहुत छोटा अंश है, तो

$$\frac{1}{1+a} \approx 1-a,$$

जहां चिन्ह $\approx$ का अर्थ है–'लगभग बराबर'।

इस बात की सत्यता जाँचना बहुत आसान है: भाज्य 1 को भाजक और भागफल के गुणन के बराबर लिखते हैं:

$$1=(1+a)(1-a),$$

अर्थात्

$$1=1-a^2.$$

चूंकि a बहुत ही नन्हा भिन्न है (उदाहरणार्थ, 0.001), इसलिये a^2 और भी नन्हा भिन्न होगा (0.000 001) और इसकी उपेक्षा की जा सकती है।

इन बातों का कलन में उपयोग करने पर:[1]

$$\frac{2}{1+\frac{1}{90000000000}}=\frac{2}{1+\frac{1}{9\cdot10^{10}}}\approx2(1-0.111\ldots\cdot10^{-10})=$$

$$=2-0.0000000000222\ldots=1.9999999999777\ldots$$

हमें पहले जैसा ही परिणाम मिलता है, पर अधिक सरल विधि से।

(पाठकों को शायद दिलचस्पी होगी कि यांत्रिकी के क्षेत्र से ली गयी इस समस्या के हल का महत्त्व क्या है। यह परिणाम दिखाता है कि प्रकाश-वेग की तुलना में बहुत छोटा होने के कारण वेग-संयोजन के पुराने नियम से विचलन व्यवहारतः उपेक्ष्य रहता है: $1 km/s$ जैसे बड़े वेग के लिये भी विचाराधीन संख्या के ग्यारहवें अंक से ही उसका प्रभाव शुरू होता है, जबकि साधारण तकनीक में $4-6$ अंकों से ही काम चलाया जाता है। इसलिये हम पूर्ण अधिकार के साथ कह सकते हैं कि प्रकाश-वेग की तुलना में धीमा चलने वाले पिंडों से संबंधित तकनीकी कलनों पर आइंस्टाइन की नयी यांत्रिकी व्यवहारतः कोई प्रभाव नहीं डालती। पर आधुनिक जीवन में एक ऐसा भी क्षेत्र है, जिसमें इस निष्कर्ष का उपयोग बहुत सावधानी के साथ करनी चाहिये। बात अंतरिक्ष-यात्रा की है। अभी हम स्पूतनिक और यानों का वेग $10 km/s$ तक बढ़ा चुके हैं। इस स्थिति में आइंस्टाइन की यांत्रिकी और क्लासिकल यांत्रिकी का फर्क नवें अंक से

---

[1] आगे हम लोग निम्न सन्निकट समता का उपयोग करेंगे:

$$\frac{A}{1+a}\approx A(1-a).$$

प्रभाव डालना शुरू कर देगा। और अब वह दिन भी दूर नहीं है, जब वेग और भी बढ़ाया जा सकेगा।

बिना बीजगणित के और भी आसान

बीजगणित अंकगणित को महत्त्वपूर्ण सहायताएं पहुँचाता है, पर ऐसी स्थितियां भी कम नहीं हैं, जब बीजगणित सिर्फ अनावश्यक जटिलताएं ही उत्पन्न करता है। गणित के सच्चे ज्ञान का यही तो अर्थ है कि गणितीय साधनों का उपयोग सबसे सीधा और विश्वस्त हल दे सके; इसमें यह नहीं सोचना चाहिये कि हल की विधि अंकगणितीय है या बीजगणितीय या ज्यामितिक, आदि। इसीलिये यहां एक ऐसा प्रश्न भी देखना निरर्थक नहीं होगा, जिसमें बीजगणित का उपयोग हलकर्त्ता को चक्कर में ही डालेगा, उसकी सहायता नहीं करेगा। निम्न प्रश्न इस दृष्टिकोण से अत्यंत शिक्षाप्रद है:

ऐसी अल्पतम संख्या ढूंढ़िये, जिसमें

2 से भाग देने पर शेष 1 मिलता है
3 « « « « 2 « «
4 « « « « 3 « «
5 « « « « 4 « «
6 « « « « 5 « «
7 « « « « 6 « «
8 « « « « 7 « «
9 « « « « 8 « «

हल

यह सवाल जबानी पूछा गया था: "आप इसे कैसे हल करेंगे? इसमें इतने सारे समीकरण हैं कि उनसे पिंड छुड़ाना मुश्किल हो जा-येगा"।

प्रश्न बहुत आसानी से हल होता है, इसके लिये किसी भी समी-करण, किसी भी बीजगणित की आवश्यकता नहीं है,—यह सरल अंकगणितीय विचारों से हल हो जाता है।

यदि इष्ट संख्या में इकाई जोड़ दी जाये, तो क्या होगा? प्राप्त संख्या में 2 से भाग देने पर शेष $1+1=2$ आयेगा, अर्थात् प्राप्त संख्या 2 से बिना शेष विभाजित हो जायेगी। इन्हीं कारणों से वह 3, 4, 5, 6, 7, 8 और 9 से भी पूर्णतया विभाज्य है। ऐसी अल्पतम संख्या है $9\cdot8\cdot7\cdot5=2520$, अतः इष्ट संख्या इससे एक कम, अर्थात् 2519 है। उत्तर सही है या नहीं, इसकी जाँच आप स्वयं कर ले सकते हैं।

अध्याय 4

देश्रोफांत के समीकरण

स्वेटर की खरीद

प्रश्न

आपको दूकान में खरीदे गये स्वेटर का दाम 19 रूबल चुकाना है। आप के पास सिर्फ तिनरूबलिया नोट है और दूकानदार के पास सिर्फ पाँचरूबलिया हैं। क्या ऐसी स्थिति में स्वेटर नगद खरीदा जा सकता है? यदि हां, तो किस प्रकार?

प्रश्न का सार यही है कि आप दूकानदार को तीन-तीन रूबल के कितने नोट दें कि वह आपको पाँच-पाँच रूबल के कुछ नोट वापस करते हुए अपने 19 रूबल प्राप्त कर ले। प्रश्न में दो अज्ञात राशियां हैं–तिनरूबलियों की संख्या x (जो आप देंगे) और पँचरूबलियों की संख्या y (जो दूकानदार आपको देगा)। पर समीकरण एक ही बन सकता है:

$$3x - 5y = 19.$$

दो अज्ञात राशियों वाले एक समीकरण के अनंत हल होते हैं, पर यहां यह स्पष्ट नहीं है कि हलों में एक भी ऐसा x, y है या नहीं, जो धनात्मक और पूर्ण हो (याद करें कि x और y नोटों की संख्याएं हैं)। इसीलिये बीजगणित ने ऐसे 'अनिश्चित' समीकरणों के हल की विधियां भी विकसित की हैं। इसका श्रेय प्राचीन यूनानी गणितज्ञ देश्रोफांत को है, इसीलिये इन समीकरणों को 'देश्रोफांती समीकरण' कहते हैं।

हल

ऊपर दिये गये उदाहरण से हम दिखायेंगे कि इस तरह के समीकरण कैसे हल किये जाते हैं।

समीकरण

$$3x-5y=19$$

से x और y के मान ज्ञात करने हैं; इतना पता है कि x और y पूर्ण और धनात्मक संख्याएं हैं।

कम संगुणक वाली अज्ञात राशि, अर्थात् $3x$ को अलग करते हैं:

$$3x=19+5y,$$

जिससे

$$x=\frac{19+5y}{3}=6+y+\frac{1+2y}{3}.$$

चूंकि x, 6 और y पूर्ण संख्याएं हैं, इसलिये समिका तभी संभव है, जब $\frac{1+2y}{3}$ भी पूर्ण संख्या होगी। इसे वर्ण t से द्योतित करें। तब

$$x=6+y+t,$$

जहां

$$t=\frac{1+2y}{3},$$

और इसीलिये

$$3t=1+2y, \quad 2y=3t-1.$$

अंतिम समीकरण से y निर्धारित करते हैं:

$$y=\frac{3t-1}{2}=t+\frac{t-1}{2}.$$

चूंकि y और t पूर्ण संख्याएं हैं, इसलिये $\frac{t-1}{2}$ को भी पू
(मान लें, t_1) होना चाहिये। अतः

$$y=t+t_1,$$

जिसमें $t_1=\frac{t-1}{2}$ है,
जिससे

$$2t_1=t-1 \quad \text{और} \quad t=2t_1+1.$$

मान $t=2t_1+1$ पिछले समीकरणों में रखने पर:

$$y=t+t_1=(2t_1+1)+t_1=3t_1+1,$$
$$x=6+y+t=6+(3t_1+1)+(2t_1+1)=8+5t_1.$$

इस प्रकार हमें x और y के लिये व्यंजन मिलते हैं[1]:

$$x=8+5t_1,$$
$$y=1+3t_1.$$

संख्याएं x और y हम जानते हैं कि सिर्फ पूर्ण ही नहीं हैं, धनात्मक भी हैं, अर्थात् 0 से अधिक हैं। अतः

---

[1] सच कहें, तो हमने अभी इतना ही सिद्ध किया है कि समीकरण $3x-5y=19$ के किसी भी पूर्णसांख्यिक हल का रूप है $x=8+5t_1$, $y=1+3t_1$ जहां t_1 कोई पूर्ण संख्या है। विलोम (अर्थात् यह कि किसी भी पूर्ण t_1 से हम प्रत्त समीकरण का पूर्ण-सांख्यिक हल ही प्राप्त करेंगे) अभी सिद्ध नहीं किया गया है। लेकिन इसकी सच्चाई सरलतापूर्वक जाँची जा सकती है; इसके लिये उलटे विचार-क्रम का अनुसरण किया जा सकता है, या आरंभिक समीकरण में x और y के ये मान बैठाकर देखा जा सकता है।

$$8+5t_1>0,$$
$$1+3t_1>0.$$

इन असमिकाओं से ज्ञात होता है :

$$5t_1>-8 \quad \text{और} \quad t_1>-\frac{8}{5},$$
$$3t_1>-1 \quad \text{और} \quad t_1>-\frac{1}{3}.$$

राशि t_1 पर यही रोक है : उसे $-\frac{1}{3}$ से (और इसीलिये $-\frac{8}{5}$ से भी) बड़ा होना चाहिये। पर चूंकि t_1 कोई पूर्ण संख्या है, इसलिये हम निष्कर्ष निकालते हैं कि इसके सिर्फ निम्न मान संभव हैं :

$$t_1=0, 1, 2, 3, 4, \ldots$$

x और y के तदनुरूप मान निम्न होंगे :

$$x=8+5t_1=8, 13, 18, 23, \ldots$$
$$y=1+3t_1=1, 4, 7, 10, \ldots$$

अब हम बता सकते हैं कि मूल्य किस तरह चुकाना चाहिये :

या तो आप 8 तिनरूबलिया देते हैं और दूकानदार आपको एक पँचरूबलिया वापस करता है :

$$8\cdot3-5=19,$$

या आप 13 तिनरूबलिया देते हैं और 4 पँचरूबलिया वापस पाते हैं :

$$13\cdot3-4\cdot5=19,$$

आदि।

सिद्धांतः प्रश्न के अनंत हल हैं, पर व्यवहार में हलों की संख्या बहुत सीमित है, क्योंकि अनंत संख्या में नोट न तो आपके पास होंगे,

ा दूकानदार के ही पास। यदि, उदाहरणार्थ, हरेक के पास दस-दस नोट ही हैं, तो चुकता सिर्फ एक विधि से संभव है: 8 तिनरूबलिया देना और 5 रूबल वापस लेना। जैसा हम देख रहे हैं, अनिश्चित समीकरण भी व्यवहारतः बिल्कुल निश्चित हल दे सकते हैं।

अब हम पाठकों को अभ्यास के लिये इस प्रश्न का एक अन्य रूप हल करने की सलाह देते हैं: स्वेटर ऐसी स्थिति में खरीदना है, जब आपके पास सिर्फ पँचरूबलिया नोट हैं और दूकानदार के पास – सिर्फ तिनरूबलिया। परिणामस्वरूप आपको निम्न हल मिलेंगे:

$$x = 5, 8, 11, \ldots$$
$$y = 2, 7, 12, \ldots$$

सचमुच ही,

$$5 \cdot 5 - 2 \cdot 3 = 19,$$
$$8 \cdot 5 - 7 \cdot 3 = 19,$$
$$11 \cdot 5 - 12 \cdot 3 = 19,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

ये परिणाम हम मूल प्रश्न के तैयार समाधान से भी प्राप्त कर सकते हैं; इसके लिये सिर्फ सरल बीजगणितीय विधियों का उपयोग करना पड़ता है। चूंकि पँचरूबलिया देने और तिनरूबलिया लेने का वही अर्थ है, जो 'ऋण पँचरूबलिया लेने' और 'ऋण तिनरूबलिया देने' का, इसलिये नये रूप में भी प्रश्न उसी समीकरण से हल हो सकता है, जिसे हमने मूल प्रश्न के लिये बनाया था:

$$3x - 5y = 19,$$

लेकिन अब शर्त्त दूसरी है: x और y ऋणात्मक संख्याएं हैं। इसलिये समीकरणों

$$x = 8 + 5t_1, \quad y = 1 + 3t_1$$

में $x<0$ तथा $y<0$ मानकर ज्ञात करते हैं कि

$$8+5t_1<0, \quad 1+3t_1<0,$$

इसलिये

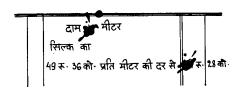
$$t_1<-\frac{8}{5}.$$

$t_1=-2, -3, -4$ आदि रखकर पिछले सूत्र से x तथा y के निम्न मान प्राप्त कर सकते हैं:

$$t_1=-2, -3, -4,$$
$$x=-2, -7, -12,$$
$$y=-5, -8, -11.$$

हलों के प्रथम युग्म $x=-2, y=-5$ का अर्थ है कि खरीददार 'ऋण 2 तिनरूबलिया देता है' और 'ऋण 5 पँचरूबलिया वापस पाता है', अर्थात् (सामान्य भाषा में) वह 5 पँचरूबलिया से कीमत अदा करता है और स्वेटर के साथ 2 तिनरूबलिया वापस पाता है। अन्य हलों का भी अर्थ इसी तरह निकाला जा सकता है।

दूकान का लेखा-निरीक्षण

दूकान के बही-खाते का निरीक्षण करते वक्त एक जगह लिखावट पर स्याही की बूंदें फैली हुई थीं, जिसका रूप इस प्रकार था:

समझना मुश्किल था कि कितना मीटर सिल्क बिका था, पर इसमें कोई शक नहीं था कि यह पूर्ण संख्या ही थी, भिन्न नहीं; बिक्री से प्राप्त राशि में भी सिर्फ अंतिम तीन अंक स्पष्ट थे, पर साथ-साथ यह भी निर्धारित कर लिया गया कि उनके पहले कोई और भी तीन अंक थे।

क्या इन चिन्हों के आधार पर निरीक्षक पूरी लिखावट का पुनरुद्धार कर सकते हैं?

हल

मीटरों की संख्या x से द्योतित करते हैं। बिक्री से हाथ आयी राशि कोपेकों में होगी

$$4936x.$$

बिक्री की राशि में स्याही से तीन अस्पष्ट अंकों की संख्या को y से द्योतित करते हैं। जाहिर है कि यह हजारों की संख्या बताती है, अतः कुल राशि कोपेकों में निम्न व्यंजन से व्यक्त होगी:

$$1\,000y+728.$$

समीकरण प्राप्त होता है:

$$4\,936x=1\,000y+728,$$

या 8 से काटने पर:

$$617x-125y=91.$$

इस समीकरण में x और y पूर्ण संख्याएं हैं और y का मान 999 से अधिक नहीं हो सकता क्योंकि वह तीन अंकों से अधिक का नहीं है। समीकरण पिछले प्रश्न की भाँति हल करते हैं:

$$125y=617x-91,$$

$$y=5x-1+\frac{34-8x}{125}=5x-1+\frac{2(17-4x)}{125}=5x-1+2t.$$

(यहां हमने $\frac{617}{125}=5-\frac{8}{125}$ लिया है क्योंकि हमारे लिये यथासंभव कम शेष रखना अधिक सुविधाजनक होगा। व्यंजन

$$\frac{2(17-4x)}{125}$$

एक पूर्ण संख्या है और चूंकि 2 को 125 से विभाजित नहीं किया जा सकता, इसलिये $\frac{17-4x}{125}$ को भी एक पूर्ण संख्या होना चाहिये, जिसे हम t से द्योतित करते हैं।)

अब समीकरण

$$\frac{17-4x}{125}=t$$

से

$$17-4x=125t,$$
$$x=4-31t+\frac{1-t}{4}=4-31t+t_1,$$

जहां

$$t_1=\frac{1-t}{4}$$

है, अतः

$$4t_1=1-t;$$
$$t=1-4t_1;$$
$$x=125t_1-27$$
$$y=617t_1-134^{1)}.$$

---

[1] ध्यान दें कि t_1 के संगुणक आरंभिक समीकरण $617x-125y=91$ में x तथा y के संगुणकों के बराबर हैं; सिर्फ t_1 के एक संगुणक का चिन्ह विपरीत है। यह संयोग की बात नहीं है; हम सिद्ध कर सकते हैं कि जब भी x और y के संगुणक परस्पर रूढ़ होंगे, परिणाम इसी तरह का मिलेगा।

हम जानते हैं कि

$$100 \leqslant y < 1\,000.$$

अत :

$$100 \leqslant 617t_1 - 134 < 1000,$$

जिससे

$$t_1 \geqslant \frac{234}{617} \quad \text{तथा} \quad t_1 < \frac{1134}{617}.$$

स्पष्ट है कि t_1 का सिर्फ एक मान संभव है :

$$t_1 = 1,$$

अत:

$$x = 98, \quad y = 483,$$

अर्थात् 98 मीटर बेचा गया था, जिससे 4837 रूबल 28 कोपेक मिले थे। लिखावट स्पष्ट हो गयी।

डाक-टिकटों की खरीद

प्रश्न

एक रूबल (अर्थात 100 कोपेक) में एक कोपेक के, 4 कोपेक के और 12 कोपेक के कुल 40 डाक-टिकट खरीदने हैं। हर कीमत वाले टिकटों की संख्या बतायें।

हल

इस स्थिति में हमें तीन अज्ञात राशियों वाले दो समीकरण मिलेंगे :

$$x+4y+12z=100,$$
$$x+y+z=40,$$

जहां x एक कोपेक के डाक-टिकटों की संख्या है, y— चार कोपेक के, और z – बारह कोपेक के।

प्रथम समीकरण में से दूसरे को घटाने पर हमें दो अज्ञात राशियों वाला एक समीकरण प्राप्त होगा :

$$3y+11z=60.$$

y ज्ञात करते हैं :

$$y=20-11\cdot\frac{z}{3}.$$

स्पष्ट है कि $\frac{z}{3}$ एक पूर्ण संख्या है; इसे t से द्योतित करते हैं। मिलता है :

$$y=20-11t,$$
$$z=3t.$$

y और z के व्यंजनों को मूल समीकरणों में से दूसरे में रखने पर :

$$x+20-11t+3t=40;$$

जिससे

$$x=20+8t.$$

चूंकि $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$, $z\geqslant 0$, इसलिये t के मान निर्धारित करना कठिन नहीं रह जाता :

$$0\leqslant t\leqslant 1\frac{9}{11},$$

जिससे निष्कर्ष निकलता है कि t के सिर्फ दो मान (पूर्ण संख्याओं में) संभव हैं :

$$t=0 \quad \text{और} \quad t=1.$$

x, y, z के तदनुरूप मान निम्न होंगे:

$t=$	0	1
$x=$	20	28
$y=$	20	9
$z=$	0	3

जांच

$$20 \cdot 1 + 20 \cdot 4 + 0 \cdot 12 = 100,$$
$$28 \cdot 1 + 9 \cdot 4 + 3 \cdot 12 = 100.$$

इस प्रकार, डाक-टिकटों की ख़रीद दो प्रकार से संभव है (लेकिन यदि यह शर्त्त रखी जाये कि हर कीमत का कम से कम एक डाक-टिकट जरूर खरीदा जाये, तो सिर्फ एक प्रकार से संभव है)।

अगला प्रश्न भी इसी तरह का है।

फलों की खरीद

प्रश्न

5 रूबल में 100 विभिन्न फल खरीदे गये हैं, जिनकी कीमतें निम्न हैं:

प्रति तरबूज . . . . . 50 कोपेक
« सेब . . . . 10 «
« आलूचा . . . . . . 1 «

कौनसा फल कितना खरीदा गया है?

हल

तरबूजों की संख्या x से, सेबों की y से और आलूचा की z से द्योतित करके दो समीकरण बनाते हैं:

$$\begin{cases} 50x+10y+1z=500, \\ x \quad +y \quad +z=100. \end{cases}$$

प्रथम समीकरण में से दूसरा समीकरण घटाकर दो अज्ञात राशियों वाला एक समीकरण प्राप्त करते हैं:

$$49x+9y=400.$$

आगे की चालें निम्न हैं:

$$y=\frac{400-49x}{9}=44-5x+\frac{4(1-x)}{9}=44-5x+4t,$$

$$t=\frac{1-x}{9}, \quad x=1-9t,$$

$$y=44-5(1-9t)+4t=39+49t.$$

असमिका $1-9t \geqslant 0$ तथा $39+49t \geqslant 0$ से निर्धारित करते हैं कि

$$\frac{1}{9} \geqslant t \geqslant -\frac{39}{49}$$

और इससे निष्कर्ष निकलता है कि $t=0$ है। अतः

$$x=1, \quad y=39.$$

x और y के ये मान तीसरे समीकरण में रखने पर: $z=60$.

इस प्रकार, खरीदा गया: 1 तरबूज, 39 सेब और 60 आलूचा। अन्य संचय संभव नहीं हैं।

जन्म-दिन ताड़ना

प्रश्न

अनिश्चित समीकरण हल करना आने पर आप निम्न गणितीय जादू दिखा सकते हैं।

आप अपने मित्र से कहते हैं कि वह अपने जन्मदिन की तारीख़ में 12 से गुणा करे और महीने की क्रमसंख्या में 31 से गुणा करे। वह आपको दोनों गुणनफलों का योगफल बताता है और आप इसके आधार पर उसका जन्मदिन बता देते हैं।

जैसे, यदि आपके मित्र का जन्म 9 फरवरी को हुआ था, तो वह निम्न संक्रियाएं संपन्न करता है:

$$9 \cdot 12 = 108, \quad 2 \cdot 31 = 62,$$
$$108 + 62 = 170.$$

आखिरी परिणाम 170 वह आपको बता देता है और आप उसका जन्मदिन ज्ञात कर लेते हैं। कैसे?

हल

प्रश्न में अनिश्चित समीकरण

$$12x + 31y = 170$$

हल करना पड़ता है, जिसमें x तथा y पूर्ण संख्याएं हैं और तारीख x का मान 31 से अधिक नहीं है, महीने की क्रमसंख्या y का मान 12 से अधिक नहीं है।

$$x=\frac{170-31y}{12}=14-3y+\frac{2+5y}{12}=14-3y+t,$$

$$2+5y=12t,$$

$$y=\frac{-2+12t}{5}=2t-2\cdot\frac{1-t}{5}=2t-2t_1,$$

$$1-t=5t_1, \quad t=1-5t_1,$$

$$y=2(1-5t_1)-2t_1=2-12t_1,$$

$$x=14-3(2-12t_1)+1-5t_1=9+31t_1.$$

चूंकि $31 \geqslant x > 0$ तथा $12 \geqslant y > 0$, इसलिये t_1 की सीमाएं हैं :

$$-\frac{9}{31} < t_1 < \frac{1}{6}.$$

अत: $t_1=0$, $x=9$, $y=2$.

जन्मदिन दूसरे महीने की नवीं तारीख, अर्थात् 9 फरवरी है।

एक दूसरा हल भी प्रस्तुत किया जा सकता है, जिसमें समीकरण की आवश्यकता नहीं है। आपको संख्या $a=12x+31y$ बताया गया है। चूंकि $12x+24y$ संख्या 12 से विभाज्य है, इसलिये $7y$ और a में 12 से भाग देने पर समान शेष मिलेगा। दोनों में 7 से गुणा करने पर गुणनफल क्रमश: $49y$ और $7a$ मिलेंगे; इनमें भी 12 से भाग देने पर समान शेष मिलेंगे। लेकिन $49y=48y+y$ और $48y$ संख्या 12 से विभाज्य है, अत: y और $7a$ में 12 से भाग देने पर समान शेष मिलेंगे। अन्य शब्दों में, यदि a संख्या 12 से अविभाज्य है, तो y का मान $7a$ में 12 से भाग देने पर प्राप्त शेष के बराबर होगा; यदि a संख्या 12 से विभाज्य है, तो $y=12$ है। इस तरह संख्या y (महीने की क्रमसंख्या) पूर्णतया निर्धारित हो जाती है। और y जान लेने के बाद x का मान निकालना कठिन नहीं रह जाता।

एक छोटी-सी सलाह है: $7a$ में 12 से भाग देकर शेष निकालने

के पहले a की जगह a में 12 से भाग देने पर प्राप्त शेष का उपयोग कीजिये। जैसे, यदि $a=170$ है, तो आपको मन ही मन निम्न कलन करने चाहियें :

$$170=12 \cdot 14+2 \text{ (अर्थात् शेष 2 है) };$$
$$2 \cdot 7=14; \ 14=12 \cdot 1+2 \text{ (अर्थात् } y=2\text{) };$$
$$x=\frac{170-31y}{12}=\frac{170-31 \cdot 2}{12}=\frac{108}{12}=9 \text{ (अर्थात् } x=9\text{)}.$$

अब आप अपने मित्र को उसका जन्मदिन बता सकते हैं : 9 फरवरी।

अब सिद्ध करेंगे कि इस जादू में कभी गलती नहीं होती, अर्थात् समीकरण का हल धनात्मक पूर्ण संख्याओं में एकमात्र है। आपका मित्र जो संख्या बताता है, उसे a से द्योतित करें। अतः जन्मदिन बताने का अर्थ है निम्न समीकरण हल करना :

$$12x+31y=a.$$

हम 'विपरीत से सिद्धि' की विधि अपनायेंगे। मान लें कि धनात्मक पूर्ण संख्याओं में समीकरण के दो विविध हल हैं :
x_1, y_1 तथा x_2, y_2 ; जहां x_1, x_2 के मान 31 से अधिक नहीं हैं और y_1, y_2 के मान 12 से अधिक नहीं हैं। अतः

$$12x_1+31y_1=a,$$
$$12x_2+31y_2=a.$$

प्रथम समीकरण में से दूसरा घटाने पर :

$$12(x_1-x_2)+31(y_1-y_2)=0.$$

इस समीकरण से निष्कर्ष निकलता है कि संख्या $12(x_1-x_2)$ संख्या 31 से विभाज्य है। चूंकि x_1, x_2 धनात्मक संख्याएं हैं, जिनके मान 31 से अधिक

नहीं हो सकते, इसलिये उनके अंतर $(x_1 - x_2)$ का मान 31 से कम ही होगा। इसलिये संख्या $12(x_1 - x_2)$ संख्या 31 से तभी विभाजित हो सकती है, जब $x_1 = x_2$ होगा, अर्थात् जब दोनों हल संपात करेंगे। इस प्रकार, दो विविध हलों का अस्तित्व मानने पर परस्पर विरोधी निष्कर्ष मिलते हैं।

मुर्गियों की बिक्री

एक पुराना प्रश्न

तीन बहनें मुर्गियां बेचने के लिये बाजार आयीं। एक के पास 10 मुर्गियां थीं, दूसरी के पास 16 और तीसरी के पास 26 मुर्गियां थीं। दोपहर तक तीनों ने समान मूल्य पर अपनी कुछ मुर्गियां बेचीं। दोपहर के बाद इस डर से कि सारी मुर्गियां नहीं बिक पायेंगी, उन्होंने दाम कम कर दिया और शाम तक पुनः समान मूल्य पर बाकी मुर्गियां भी बेच दीं। घर लौटीं तो बेचने से उनके पास समान धन-राशियां थीं: हर बहन को 35 रूबल मिले थे।

दोपहर के पहले और बाद के मूल्य बतायें।

हल

दोपहर तक हर बहन की बिकी मुर्गियों की संख्याओं को क्रमशः x, y, z से द्योतित करते हैं। दोपहर के बाद उन्होंने क्रमशः $(10 - x)$, $(16 - y)$, $(26 - z)$ मुर्गियां बेचीं। दोपहर के पहले का मूल्य m से और दोपहर के बाद का मूल्य n से द्योतित करते हैं। स्पष्टता के लिये इन प्रतीकों को सारणीबद्ध कर लेते हैं:

बिकी मुर्गियों की संख्या				मूल्य
दोपहर तक	x	y	z	m
दोपहर के बाद	$10-x$	$16-y$	$26-z$	n

पहली बहन को मिला

$$mx+n(10-x), \quad \text{अत:} \quad mx+n(10-x)=35;$$

दूसरी को

$$my+n(16-y), \quad \text{अत:} \quad my+n(16-y)=35;$$

तीसरी को

$$mz+n(26-z), \quad \text{अत:} \quad mz+n(26-z)=35.$$

तीनों समीकरणों को रूपांतरित करने पर :

$$\begin{cases}(m-n)x+10n=35,\\(m-n)y+16n=35,\\(m-n)z+26n=35.\end{cases}$$

तीसरे समीकरण में से क्रमश: पहले तथा दूसरे को घटाने पर :

$$\begin{cases}(m-n)(z-x)+16n=0,\\(m-n)(z-y)+10n=0.\end{cases}$$

या

$$\begin{cases}(m-n)(x-z)=16n,\\(m-n)(y-z)=10n.\end{cases}$$

इनमें से प्रथम समीकरण को दूसरे से विभाजित करने पर :

$$\frac{x-z}{y-z}=\frac{8}{5}, \quad \text{या} \quad \frac{x-z}{8}=\frac{y-z}{5}.$$

चूंकि x, y, z पूर्ण संख्याएं हैं, इसलिये अंतर $x-z$, $y-z$ भी पूर्ण संख्याएं हैं। इसलिये समिका

$$\frac{x-z}{8}=\frac{y-z}{5}$$

के अस्तित्व के लिये आवश्यक है कि $x-z$ संख्या 8 से विभाज्य हो और $y-z$ संख्या 5 से विभाज्य हो। अतः

$$\frac{x-z}{8}=t=\frac{y-z}{5},$$

जिससे

$$x=z+8t,$$
$$y=z+5t.$$

ध्यान दें कि t सिर्फ पूर्ण संख्या ही नहीं है, वह धनात्मक भी है, क्योंकि $x>z$ (अन्यथा पहली बहन को उतनी ही बिक्रय-राशि नहीं मिलती जितनी तीसरी को)।

चूंकि $x<10$, इसलिये

$$z+8t<10.$$

z तथा t के पूर्ण और धनात्मक होने के कारण अंतिम असमिका तभी संतुष्ट होती है, जब $z=1$ और $t=1$ होता है। ये मान समीकरण

$$x=z+8t \quad \text{और} \quad y=z+5t$$

में रखने पर : $x=9$, $y=6$.

अब हम आरंभिक समीकरणों

$$mx+n(10-x)=35,$$
$$my+n(16-y)=35,$$
$$mz+n(26-z)=35$$

में x, y, z के मान रखकर मुर्गियों की कीमतें ज्ञात कर सकते हैं:

$$m=3\frac{3}{4} \text{ रूबल}, \quad n=1\frac{1}{4} \text{ रूबल}.$$

अतः दोपहर तक एक मुर्गी का दाम 3 रूबल 75 कोपेक था, दोपहर के बाद 1 रूबल 25 कोपेक (एक रूबल में सौ कोपेक होते हैं)।

दो संख्याएं और चार संक्रियाएं

प्रश्न

पिछले प्रश्न को, जिसमें पाँच अज्ञात राशियों वाले तीन समीकरण मिले थे, हमने सामान्य नियम से नहीं, बल्कि स्वतंत्र गणितीय विचारों की सहायता से हल किया था। ठीक इसी तरह हम आगे के प्रश्न हल करेंगे, जिनमें हमें दूसरे घात के अनिश्चित समीकरण प्राप्त होंगे।

एक प्रश्न निम्न है।

दो धनात्मक पूर्ण संख्याओं के साथ निम्न चार संक्रियाएं संपन्न की गयीं:

1) इन्हें जोड़ा गया;
2) बड़ी में से छोटी को घटाया गया;
3) आपस में गुणा किया गया;
4) बड़ी में छोटी से भाग दिया गया।

चारों परिणामों को जोड़ने पर 243 मिला। कौनसी संख्याएं थीं दोनों?

हल

यदि बड़ी संख्या x है और छोटी y, तो

$$(x+y)+(x-y)+xy+\frac{x}{y}=243.$$

यदि इस समीकरण को y से गुणा करके कोष्ठक खोले जायें और समरूप पदों का जोड़-घटाव कर लिया जाये, तो प्राप्त होगा:

$$x(2y+y^2+1)=243y.$$

लेकिन $2y+y^2+1=(y+1)^2$ है, इसलिये

$$x=\frac{243y}{(y+1)^2}.$$

x पूर्ण संख्या हो, इसके लिये जरूरी है कि अंशनाम $(y+1)^2$ को संख्या 243 का एक विभाजक (या गुणनखंड) होना चाहिये, क्योंकि y और $y+1$ के एक जैसे संगुणक (या समापवर्तक) नहीं हो सकते। साथ ही हम जानते हैं कि $243=3^5$, अतः 243 सिर्फ निम्न पूर्ण वर्गों से विभाज्य है: 1, 3^2 और 9^2 से। इस प्रकार, $(y+1)^2$ को 1, 3^2 या 9^2 के बराबर होना चाहिये। इससे निष्कर्ष निकलता है कि (यदि यह स्मरण करें कि y को धनात्मक होना चाहिये) y बराबर 8 है या 2 है।

तब x बराबर है

$$\frac{243\cdot8}{81} \text{ या } \frac{243\cdot2}{9} \text{ के।}$$

इस प्रकार, इष्ट संख्याएं हैं: 24 और 8 या 54 और 2।

कौनसा आयत

प्रश्न

आयत की भुजाएं पूर्ण संख्याओं से व्यक्त होती हैं। वे कितनी लंबी हों कि आयत की परिमिति सांख्यिक रूप से उसके क्षेत्रफल के बराबर हो जाये?

हल

आयत की भुजाओं को x तथा y से द्योतित करके समीकरण बनाते हैं:

$$2x+2y=xy,$$

जिससे

$$x=\frac{2y}{y-2}.$$

चूंकि x तथा y को धनात्मक होना चाहिये, इसलिये संख्या $y-2$ को भी धनात्मक होना चाहिये, अर्थात् y को 2 से अधिक होना चाहिये।

अब ध्यान दें कि

$$x=\frac{2y}{y-2}=\frac{2(y-2)+4}{y-2}=2+\frac{4}{y-2}.$$

चूंकि x को पूर्ण संख्या होना चाहिये, इसलिये व्यंजन $\frac{4}{y-2}$ को भी पूर्ण संख्या होना चाहिये। लेकिन $y>2$ होने के कारण यह तभी संभव है, जब y का मान 3, 4 या 6 के बराबर होगा। x के तदनुरूप मान 6, 4, 3 होंगे।

इस प्रकार, इष्ट आकृति या तो आयत है, जिसकी भुजाएं 3 और 6 हैं, या वर्ग है, जिसकी हर भुजा 4 है।

दो अंकों वाली दो संख्याएं

प्रश्न

संख्या 46 तथा 96 में एक रोचक विशेषता है: इनमें से प्रत्येक अंकों की आपसी जगहें बदल दी जायें, तो भी इनका गुणनफल पहले जैसा ही रहता है।

सचमुच,

$$46 \cdot 96 = 4416 = 64 \cdot 69.$$

यह निर्धारित करना है कि दो अंकों वाली संख्याओं के और भी ऐसे युग्म हैं या नहीं, जिनमें इस तरह की विशेषता होती है। कैसे उन सबों को ढूंढ़ा जाये?

हल

इष्ट संख्याओं के अंकों को x तथा y, z तथा t से द्योतित करके समीकरण बनाते हैं:

$$(10x+y)(10z+t) = (10y+x)(10t+z).$$

कोष्ठक खोलकर सरल करने पर:

$$xz = yt,$$

जहां x, y, z, t पूर्ण संख्याएं हैं और सभी 10 से छोटी हैं। उत्तर ढूंढ़ने के लिये 9 अंकों से प्राप्त होने वाले तुल्य गुणनफलों के सभी संभव युग्म लिख लेते हैं:

$$1 \cdot 4 = 2 \cdot 2 \quad 2 \cdot 8 = 4 \cdot 4$$
$$1 \cdot 6 = 2 \cdot 3 \quad 2 \cdot 9 = 3 \cdot 6$$
$$1 \cdot 8 = 2 \cdot 4 \quad 3 \cdot 8 = 4 \cdot 6$$
$$1 \cdot 9 = 3 \cdot 3 \quad 4 \cdot 9 = 6 \cdot 6.$$
$$2 \cdot 6 = 3 \cdot 4$$

कुल 9 समिकाएं हैं। प्रत्येक से संख्याओं के एक या दो इष्ट युग्म प्राप्त हो सकते हैं। यथा, समिका $1 \cdot 4 = 2 \cdot 2$ से एक हल मिलता है:

$$12 \cdot 42 = 21 \cdot 24.$$

समिका $1 \cdot 6 = 2 \cdot 3$ से दो हल मिलते हैं:

$$12 \cdot 63 = 21 \cdot 36, \quad 13 \cdot 62 = 31 \cdot 26.$$

इसी प्रकार अन्य 14 हल भी ज्ञात किये जा सकते हैं:

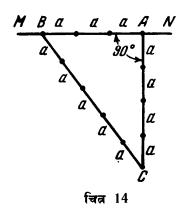
$12 \cdot 42 = 21 \cdot 24$	$23 \cdot 96 = 32 \cdot 69$
$12 \cdot 63 = 21 \cdot 36$	$24 \cdot 63 = 42 \cdot 36$
$12 \cdot 84 = 21 \cdot 48$	$24 \cdot 84 = 42 \cdot 48$
$13 \cdot 62 = 31 \cdot 26$	$26 \cdot 93 = 62 \cdot 39$
$13 \cdot 93 = 31 \cdot 39$	$34 \cdot 86 = 43 \cdot 68$
$14 \cdot 82 = 41 \cdot 28$	$36 \cdot 84 = 63 \cdot 48$
$23 \cdot 64 = 32 \cdot 46$	$46 \cdot 96 = 64 \cdot 69$

पीथागोरसी संख्याएं

विस्तृत समतल भूभागों पर परस्पर लंब रेखाएं खींचने के लिये भूसर्वेक्षक एक बहुत ही शुद्ध और सुविधाजनक विधि का उपयोग करते हैं। मान लें कि रेखा MN के बिन्दु A पर लंब खींचना है (चित्र 14)। A से AM की ओर कोई दूरी a तीन बार नाप लेते हैं। फिर रस्सी में तीन गाँठ बाँध लेते हैं, जिनके बीच की दूरी $4a$ और $5a$ होती है। किनारे की गाँठों को बिन्दु A और B पर जड़ कर बीच वाली गाँठ को दूर ले जाते हुए रस्सी को तानते हैं। रस्सी एक त्रिभुज की आकृति में होगी, जिसमें कोण A एक समकोण के बराबर होगा।

11—1862

यह विधि अत्यंत प्राचीन है, मिश्र के पिरामिड बनाने वाले भी इसी का उपयोग करते थे। विधि इस तथ्य पर आधारित है कि कोई

चित्र 14

भी त्रिभुज, जिसकी भुजाएं 3:4:5 के अनुपात में होती हैं, विश्वविख्यात पीथागोरस के साध्य के अनुसार समकोण त्रिभुज ही होता है, क्योंकि

$$3^2+4^2=5^2.$$

3, 4, 5 के अतिरिक्त भी धनात्मक पूर्ण संख्याओं a, b, c की अनंत संचियां हैं, जो निम्न संबंध को संतुष्ट कर सकती हैं:

$$a^2+b^2=c^2$$

इन्हें पीथागोरसी संख्याएं कहते हैं। पीथागोरस के साध्य के अनुसार ऐसी संख्याएं किसी समकोण त्रिभुज की भुजाओं की लंबाइयां हो सकती हैं। इसीलिये a तथा b को 'संलंब' कहते हैं और c को 'कर्ण' कहते हैं।

स्पष्ट है कि यदि a, b, c पीथागोरसी संख्याओं का कोई तिगुट

ो, तो pa, pb, pc भी पीथागोरसी संख्याएं होंगी (p पूर्ण संख्या के बराबर कोई गुणक है)। विलोमतः, यदि पीथागोरसी संख्याओं का कोई सार्विक (सामूहिक) गुणक है, तो इस सामूहिक गुणक को काटने पर पुनः पीथागोरसी संख्याएं प्राप्त होती हैं। इसीलिये हम सिर्फ परस्पर रूढ़ पीथागोरसी संख्याओं के तिगुटों का अन्वीक्षण करेंगे (बाकी तिगुट उनमें पूर्ण सांख्यिक गुणक p से गुणा करने पर मिल जायेंगे)।

यहां हम दिखायेंगे कि हर तिगुट a, b, c में से एक 'संलंब' सम होगा और दूसरा – विषम। इसके लिये हम 'विपरीत से सिद्धि' की विधि अपनायेंगे। यदि दोनों ही 'संलंब' सम होंगे, तो संख्या a^2+b^2, और इसीलिये 'कर्ण' भी सम होगा। लेकिन तीन सम संख्याओं में एक सार्विक गुणक 2 अवश्य होता है और यह हमारी इस मान्यता के प्रतिकूल है कि a, b, c परस्पर रूढ़ संख्याएं हैं। इस प्रकार, संलंब a, b में से एक अवश्य ही विषम है।

अब एक और संभावना रह जाती है: दोनों ही 'संलंब' विषम हैं और 'कर्ण' सम है। ऐसा नहीं हो सकता – यह सिद्ध करना कठिन नहीं है। सचमुच: यदि संलंबों का रूप है:

$$2x+1 \quad \text{और} \quad 2y+1,$$

तो इनके वर्गों का योगफल होगा:

$$4x^2+4x+1+4y^2+4y+1=4(x^2+x+y^2+y)+2,$$

अर्थात् यह एक ऐसी संख्या है, जिसमें 4 से भाग देने पर 2 शेष मिलेगा। लेकिन सम संख्या के वर्ग को 4 से हमेशा ही बिना शेष विभाजित होना चाहिये। इसका मतलब हुआ कि दो विषम संख्याओं के वर्गों का योगफल किसी सम संख्या का वर्ग नहीं हो सकता; अन्य शब्दों में, हमारी तीन संख्याएं पीथागोरसी नहीं हैं।

इस प्रकार, 'संलंब' a, b में से एक सम है, दूसरा विषम है। इसीलिये संख्या a^2+b^2 विषम है, अर्थात् 'कर्ण' सदा विषम है।

स्पष्टता के लिये मान लेते हैं कि 'संलंब' a विषम है और b सम है। समिका

$$a^2+b^2=c^2$$

से सरलतापूर्वक निम्न संबंध प्राप्त कर सकते हैं:

$$a^2=c^2-b^2=(c+b)(c-b).$$

दायें पक्ष के गुणक $c+b$ तथा $c-b$ परस्पर रूढ़ हैं। वास्तव में यदि इन संख्याओं में इकाई से भिन्न कोई सरल सार्विक गुणक होता, तो इस गुणक से योगफल

$$(c+b)+(c-b)=2c,$$

और अंतर

$$(c+b)-(c-b)=2b,$$

और गुणनफल

$$(c+b)(c-b)=a^2$$

भी विभाज्य होते, अर्थात् संख्या $2c$, $2b$ तथा a में भी कोई सार्विक गुणक होता। चूंकि a विषम है, इसलिये यह सार्विक गुणक दो से भिन्न होता, और इसीलिये संख्याएं a, b, c में भी यही सार्विक गुणक है– ऐसा संभव नहीं है। प्राप्त अंतर्विरोध दिखाता है कि संख्याएं $c+b$ तथा $c-b$ परस्पर रूढ़ हैं।

पर यदि परस्पर रूढ़ संख्याओं का गुणनफल एक पूर्ण वर्ग है, तो इनमें से प्रत्येक संख्या भी पूर्ण वर्ग है, अर्थात्

$$\begin{cases} c+b=m^2, \\ c-b=n^2. \end{cases}$$

इस तंत्र को हल करने पर प्राप्त होता है:

$$c = \frac{m^2+n^2}{2}, \quad b = \frac{m^2-n^2}{2},$$
$$a^2 = (c+b)(c-b) = m^2n^2, \; a = mn.$$

इस प्रकार, विचाराधीन पीथागोरसी संख्याओं का रूप है:

$$a = mn, \quad b = \frac{m^2-n^2}{2}, \quad c = \frac{m^2+n^2}{2},$$

जहां m तथा n कोई परस्पर रूढ़ विषम संख्याएं हैं। पाठक सरलतापूर्वक इसका विपरीत भी सिद्ध कर सकते हैं: सूत्र में m और n की जगह कोई भी विषम संख्याएं रखने पर पीथागोरसी संख्याएं a, b, c मिल जायेंगी।

m तथा n के भिन्न मान लेने पर प्राप्त होने वाले पीथागोरसी त्रिकों में से कुछ यहां दिये जा रहे हैं:

$m=3$, $n=1$ होने पर $3^2+4^2=5^2$
$m=5$, $n=1$ होने पर $5^2+12^2=13^2$
$m=7$, $n=1$ होने पर $7^2+24^2=25^2$
$m=9$, $n=1$ होने पर $9^2+40^2=41^2$
$m=11$, $n=1$ होने पर $11^2+60^2=61^2$
$m=13$, $n=1$ होने पर $13^2+84^2=85^2$

$m=5$, $n=3$ होने पर $15^2+8^2=17^2$
$m=7$, $n=3$ होने पर $21^2+20^2=29^2$
$m=11$, $n=3$ होने पर $33^2+56^2=65^2$
$m=13$, $n=3$ होने पर $39^2+80^2=89^2$

$m=7,\ n=5$ होने पर $35^2+12^2=37^2$

$m=9,\ n=5$ होने पर $45^2+28^2=53^2$

$m=11,\ n=5$ होने पर $55^2+48^2=73^2$

$m=13,\ n=5$ होने पर $65^2+72^2=97^2$

$m=9,\ n=7$ होने पर $63^2+16^2=65^2$

$m=11,\ n=7$ होने पर $77^2+36^2=85^2$

(पीथागोरसी संख्याओं के बाकी तिगुट या तो सार्विक गुणक रखते हैं या सौ से अधिक की संख्या रखते हैं।)

पीथागोरसी संख्याओं में कई रोचक विशेषताएं देखने को मिलती हैं, जिन्हें हम बिना प्रमाण के नीचे दे रहे हैं:

1) एक 'संलंब' अवश्य ही तीन का उत्वर्त होता है।

2) एक 'संलंब' अवश्य ही चार का उत्वर्त होता है।

3) तीनों में से एक पीथागोरसी संख्या अवश्य ही पाँच की उत्वर्त होती है।

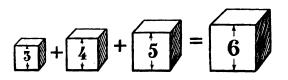
ऊपर उदाहरणस्वरूप दी गयी पीथागोरसी संख्याओं पर नजर दौड़ाकर पाठक देख ले सकते हैं कि उनमें ये गुण हैं या नहीं।

तीसरे घात का अनिश्चित समीकरण

तीन पूर्ण संख्याओं के घनों का योगफल चौथी संख्या के घन के बराबर हो सकता है। उदाहरण के लिये, $3^3+4^3+5^3=6^3$.

इसका अर्थ है कि घन, जिसकी किनारी 6cm है, तीन घनों के योगफल के बराबर होता है, जिनकी किनारियां 3cm, 4cm और 5cm हैं (चित्र 15)। यह एक ऐसा संबंध है, जिसमें अफलातून विशेष रुचि ले रहे थे।

अब इसी तरह के अन्य संबंध ढूंढ़ने की कोशिश की जाये, अर्थात् निम्न प्रश्न हल किया जाये: समीकरण $x^3+y^3+z^3=u^3$ हल करें।

चित्र 15

लेकिन इसमें अज्ञात राशि u की जगह $-t$ रखना अधिक सुविधाजनक होगा; इससे समीकरण का रूप होगा:

$$x^3+y^3+z^3+t^3=0$$

अब पूर्ण (धनात्मक और ऋणात्मक) संख्याओं में इस समीकरण के हल की विधि देखें। मान लें कि a, b, c, d तथा $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ — संख्याओं के दो चौगुट हैं, जो हमारे समीकरण को संतुष्ट करते हैं। दूसरे चौगुट की संख्याओं में कोई संख्या k से गुणा करके उन्हें प्रथम चौगुट की सानुरूप संख्याओं में जोड़ लेते हैं, संख्या k इस तरह से चुनते हैं कि प्राप्त संख्याएं

$$a+k\alpha, \quad b+k\beta, \quad c+k\gamma, \quad d+k\delta$$

भी हमारे समीकरण को संतुष्ट कर सकें। अन्य शब्दों में, k इस प्रकार चुनते हैं कि निम्न समिका सही हो:

$$(a+k\alpha)^3+(b+k\beta)^3+(c+k\gamma)^3+(d+k\delta)^3=0.$$

अब कोष्ठक तोड़ते हैं। ध्यान दें कि चौगुट a, b, c, d तथा

α, β, γ, δ हमारे समीकरण को संतुष्ट करते हैं, अर्थात् निम्न समिकाएं सही हैं:

$$a^3+b^3+c^3+d^3=0, \quad \alpha^3+\beta^3+\gamma^3+\delta^3=0,$$

अतः कोष्ठक तोड़ने के बाद मिलेगा:

$$3a^2k\alpha+3ak^2\alpha^2+3b^2k\beta+3bk^2\beta^2+3c^2k\gamma+3ck^2\gamma^2+$$
$$+3d^2k\delta+3dk^2\delta^2=0$$

या $3k[(a^2\alpha+b^2\beta+c^2\gamma+d^2\delta)+k(a\alpha^2+b\beta^2+c\gamma^2+d\delta^2)]=0$

गुणनफल तभी शून्य में परिणत हो सकता है, जब कम से कम एक गुणन-खंड शून्य हो। यहां दोनों गुणनखंडों को अलग-अलग शून्य के बराबर करके k के दो मान ज्ञात करते हैं। पहला मान, $k=0$, हमारे लिये किसी काम का नहीं है, क्योंकि इसका मतलब है: यदि संख्याओं a, b, c, d में कुछ भी नहीं जोड़ा जाये, तो प्राप्त संख्याएं हमारे समीकरण को संतुष्ट करेंगी। इसीलिये हम k का सिर्फ दूसरा मान लेंगे:

$$k=-\frac{a^2\alpha+b^2\beta+c^2\gamma+d^2\delta}{a\alpha^2+b\beta^2+c\gamma^2+d\delta^2}.$$

इस प्रकार, आरंभिक समीकरण को संतुष्ट करने वाली संख्याओं के दो चौगुट यदि ज्ञात हों तो नया चौगुट भी प्राप्त हो सकता; इसके लिये दूसरे चौगुट की संख्याओं में k से गुणा करके के उन्हें प्रथम चौगुट की सानुरूप संख्याओं में जोड़ना होगा, जहां k का मान उपरोक्त व्यंजन से प्राप्त होता है।

लेकिन यह विधि अपनाने के लिये आरंभिक समीकरण को संतुष्ट करने वाले दो संख्या-चौगुट ज्ञात होने चाहियें। एक चौगुट (3, 4, 5, –6) हम जानते हैं। दूसरा चौगुट कहां से लिया जाये? यह समस्या हल

करना बहुत आसान है: दूसरे चौगुट के रूप में [illegible] $s, -s$ ले सकते हैं, जो स्पष्ट ही हमारे समीकरण [illegible] हैं। अतः हम दो संख्या चौगुट लेते हैं:

$$a=3, \quad b=4, \quad c=5, \quad d=-6;$$
$$\alpha=r, \quad \beta=-r, \quad \gamma=s, \quad \delta=-s.$$

तब k का मान सरलतापूर्वक प्राप्त हो जाता है:

$$k=\frac{-7r-11s}{7r^2-s^2}=\frac{7r+11s}{7r^2-s^2},$$

अतः संख्याएं $a+k\alpha$, $b+k\beta$, $c+k\gamma$, $d+k\delta$ क्रमशः निम्न होंगी:

$$\frac{28r^2+11rs-3s^2}{7r^2-s^2}, \qquad \frac{21r^2-11rs-4s^2}{7r^2-s^2},$$
$$\frac{35r^2+7rs+6s^2}{7r^2-s^2}, \qquad \frac{-42r^2-7rs-5s^2}{7r^2-s^2}.$$

उपरोक्त कथनानुसार ये संख्याएं हमारे समीकरण

$$x^3+y^3+z^3+t^3=0$$

को संतुष्ट करती हैं। चूंकि इन सभी व्यंजनों में अंशनाम समान हैं, इसलिये उन्हें काट दिया जा सकता है (तात्पर्य यह है कि इन भिन्नों के संख्यानाम भी विचाराधीन समीकरण को संतुष्ट करते हैं)। इस प्रकार, r व s के किसी भी मान से प्राप्त संख्याएं

$$x=28r^2+11rs-3s^2,$$
$$y=21r^2-11rs-4s^2,$$
$$z=35r^2+7rs+6s^2,$$
$$t=-42r^2-7rs-5s^2.$$

हमारे समीकरण को संतुष्ट करती हैं—यह आप इन संख्याओं के घनों को जोड़कर देख ले सकते हैं। r तथा s के मान बदल-बदल कर हम अपने समीकरण के अनेक हल ज्ञात कर सकते हैं। यदि इन संख्याओं में कोई सार्विक गुणक (या समान गुणनखंड) होगा, तो उससे इन संख्याओं में भाग दे सकते हैं। उदाहरणार्थ, $r=1$, $s=1$ होने पर x, y, z, t के निम्न मान मिलते हैं: 36, 6, 48, —54, या इन्हें 6 से काटने पर: 6, 1, 8, —9, जिससे

$$6^3+1^3+8^3=9^3.$$

इस तरह की (सार्विक गुणक से काटने पर प्राप्त) कुछ अन्य समिकाएं नीचे दी जा रही हैं:

$r=1$, $s=2$ होने पर $38^3+73^3=17^3+76^3$,
$r=1$, $s=3$ होने पर $17^3+55^3=24^3+54^3$,
$r=1$, $s=5$ होने पर $4^3+110^3=67^3+101^3$,
$r=1$, $s=4$ होने पर $8^3+53^3=29^3+50^3$,
$r=1$, $s=-1$ होने पर $7^3+14^3+17^3=20^3$,
$r=1$, $s=-2$ होने पर $2^3+16^3=9^3+15^3$,
$r=2$, $s=-1$ होने पर $29^3+34^3+44^3=53^3$.

एक और बात बता दें: यदि आरंभिक चौगुट 3, 4, 5, —6 में, या इसके सहारे प्राप्त किसी नये चौगुट में संख्याओं का क्रम बदलकर पूरी विधि शुरू से अपनायी जाये, तो हलों का एक नया समूह मिलेगा। उदाहरणार्थ, चौगुट 3, 4, 5, —6 (अर्थात् $a=3$, $b=5$, $c=4$, $d=-6$) लेने पर x, y, z, t के निम्न मान मिलेंगे:

$$x=20r^3+10rs-3s^2,$$
$$y=12r^2-10rs-5s^2,$$
$$z=16r^2+8rs+6s^2,$$
$$t=-24r^2-8rs-4s^2.$$

इसमें r तथा s के विविध मान रख कर कई नये संबंध ज्ञात किये जा सकते हैं :

$r=1, s=1$ होने पर $9^3+10^3=1^3+12^3$,
$r=1, s=3$ होने पर $23^3+94^3=63^3+84^3$,
$r=1, s=5$ होने पर $5^3+163^3+164^3=206^3$,
$r=1, s=6$ होने पर $7^3+54^3+57^3=70^3$,
$r=2, s=1$ होने पर $23^3+97^3+86^3=116^3$,
$r=1, s=-3$ होने पर $3^3+36^3+37^3=46^3$, इत्यादि।

इस विधि से हम विचाराधीन समीकरण के असंख्य हल प्राप्त कर सकते हैं।

एक साध्य सिद्ध करने के लिये एक लाख

अनिश्चित समीकरणों से संबंधित एक प्रश्न की सारी दुनिया में धूम मची थी, क्योंकि उसके सही हल के लिये बहुत बड़े इनाम की घोषणा की गयी थी – 100 000 जर्मन मार्क का!

प्रश्न में 'फेर्मा साध्य' (या 'फेर्मा का महावाक्य') सिद्ध करना है, जिसका कथन है:

दो पूर्ण संख्याओं के समान घातों का योगफल किसी तीसरी पूर्ण संख्या के उसी घात के बराबर नहीं हो सकता। अपवाद सिर्फ दूसरा घात है, जिसके लिये यह संभव है।

अन्य शब्दों में, सिद्ध करना है कि $n>2$ होने पर समीकरण

$$x^n+y^n=z^n$$

पूर्ण संख्याओं में हलातीत है।

बात समझाने का प्रयत्न करते हैं। हम देख चुके हैं कि पूर्ण संख्याओं में समीकरण

$$x^2+y^2=z^2,$$
$$x^3+y^3+z^3=t^3$$

के असंख्य हल हैं। पर यदि आप समिका $x^3+y^3=z^3$ को संतुष्ट करने वाली तीन पूर्ण संख्याओं को ढूंढ़ने की कोशिश करेंगे, तो यह बेकार होगा।

चौथे, पाँचवें, छठे, आदि घातों के लिये भी असफलता ही हाथ आयेगी। 'फेर्मा का महावाक्य' यही कहता है।

इनाम की इच्छा रखने वालों को क्या करना है? इन्हें इस कथन को उन सभी घातों के लिये सिद्ध करना है, जिनके लिये कथन सत्य है। बात यह है कि फेर्मा साध्य अभी तक सिद्ध नहीं हुआ है, वह एक तरह से हवा में ही लटका हुआ है।

महावाक्य के निकले तीन सौ वर्ष बीत चुके हैं, पर उसका प्रमाण गणितज्ञ लोग अभी तक नहीं ढूंढ़ पाये हैं।

इस समस्या के हल में एक से एक प्रतिभाशाली गणितज्ञ लगे हुए थे, पर उन्हें सिर्फ अलग-थलग निस्थापकों (घातांकों) या इनके किसी समूह के लिये ही साध्य सिद्ध करने में सफलता मिल सकी। लेकिन आवश्यकता इस बात की है कि इसका एक सामान्य प्रमाण ढूंढ़ा जाये, जो हरेक पूर्ण निस्थापक पर लागू हो।

ध्यातव्य है कि फेर्मा साध्य का प्रमाण शायद एक बार मिला था, पर वह फिर खो गया। साध्य को XVII शती के महान गणितज्ञ पियेर फेर्मा[1] ने प्रस्तुत किया था; उनके कथनानुसार उन्हें इसका प्रमाण

---

[1] फेर्मा (1603—1665) पेशेवर गणितज्ञ नहीं थे। शिक्षा के अनुसार वे वकील थे, और संसद में सलाहकार थे। गणितीय खोजें फुरसत के वक्त किया करते थे, फिर भी उन्होंने अनेक महत्त्वपूर्ण परिणाम प्राप्त किये, जिन्हें वे तब की प्रथा के अनुसार पत्रों में अपने मित्रों—पास्कल, डेकार्ट, ह्युजेंस, रोबेर्वाल—को लिख दिया करते थे।

ज्ञात था। संख्या-सिद्धांत के अन्य प्रमेयों की तरह अपना यह महावाक्य भी उन्होंने देओफांत की कृति के हाशिये पर टिप्पणी के रूप में लिखा था ; साथ में ये शब्द भी थे :

"इस वाक्य का मुझे एक बहुत ही सुंदर प्रमाण मिला है, पर यहां इसके लिये जगह कम है।"

लेकिन गणितज्ञ के कागजपत्रों या कहीं अन्यत्र भी इस प्रमाण का कोई नामोनिशान नहीं मिल पाया।

फेर्मा के अनुयायियों को स्वतंत्र रूप से खोजें करनी पड़ीं।

इन प्रयत्नों के परिणाम निम्न हैं: ऐलर (1797) ने फेर्मा का साध्य तीसरे और चौथे घातों के लिये सिद्ध किया, पाँचवें घात के लिये उसे लेजांद्र (1823) ने सिद्ध किये, सातवें के लिये[1] – लामे और लेबेग (1840) ने। 1849 में कुंमेर ने साध्य को घातों के विस्तृत समूह के लिये सिद्ध किया – सौ से कम के सभी निस्थापकों के लिये। ये कार्य गणित के उस क्षेत्र से बहुत आगे बढ़े हुए हैं, जिससे फेर्मा परिचित थे, इसलिये यह रहस्य बना हुआ है कि उन्होंने अपने 'महा-वाक्य' का सामान्य प्रमाण कैसे ढूंढ़ लिया था। यह भी संभव है कि वे गलती पर थे।

फेर्मा-साध्य के इतिहास और उसकी वर्तमान अवस्था में रुचि रखने वाले पाठक आ० खींचिन की छोटी-सी पुस्तक 'फेर्मा का महान साध्य' पढ़ सकते हैं। उच्च कोटि के विशेषज्ञ की यह कृति गणित का साधारण ज्ञान रखने वाले पाठकों के लिये रची गयी है।

---

[1] 4 के अतिरिक्त अन्य गुणज निस्थापकों के लिये विशेष प्रमाण की आवश्यकता नहीं है ; ये स्थितियां रूढ़ निस्थापकों की स्थितियों में संरूपित की जा सकती हैं।

अध्याय 5

छठी गणितीय संक्रिया

छठी संक्रिया

जोड़ और गुणा में से प्रत्येक की सिर्फ एक-एक प्रतीप (उलटी) संक्रियाएं हैं, जिन्हें क्रमशः घटाव और भाग कहते हैं। पाँचवीं गणितीय संक्रिया – घात निकालना (या सिर्फ घातन) – की दो प्रतीप संक्रियाएं हैं: आधार ढूंढ़ना और निस्थापक (घात-सूचक) ढूंढ़ना। आधार ढूंढ़ना ही छठी गणितीय संक्रिया है, इसे मूल निकालना (या सिर्फ मूलन) कहते हैं। निस्थापक ढूंढ़ना सातवीं संक्रिया है, जिसे लघुगणक निकालना कहते हैं (आगे हम लोग इस संक्रिया को लगरथन कहेंगे और लघुगणक के लिये लगरथ शब्द का प्रयोग करेंगे – अनु०)। जोड़ और गुणा की एक-एक प्रतीप संक्रियाएं हैं और घातन की दो प्रतीप संक्रियाएं हैं, इसका कारण बहुत सरल है। जोड़ में दोनों पदों (प्रथम और द्वितीय) को समानाधिकार मिला हुआ है, वे अपनी जगहें आपस में अदला-बदली कर ले सकते हैं। यही बात गुणा के साथ भी है (इसके संगुणकों की जगहें आपस में बदली जा सकती हैं)। पर घातन में भाग लेने वाली संख्याओं, अर्थात् घात के आधार और निस्थापक के साथ यह बात नहीं है: उनकी जगहें सामान्यतः आपस में नहीं बदली जा सकतीं (जैसे $3^5 \neq 5^3$)। इसीलिये जोड़ (या गुणा) में भाग लेने वाली दो संख्याओं में से किसी को ढूंढ़ने के लिये एक सामान्य विधि – घटाव (या भाग) – का प्रयोग होता है, पर घात का आधार और घात का निस्थापक अलग-अलग विधियों से ढूंढ़े जाते हैं।

अभी गणित में मूलन को चिन्ह $\sqrt{}$ से द्योतित करते हैं। बहुत कम लोगों को पता है कि मूलन का चिन्ह लातीनी वर्ण r का बिगड़ा हुआ रूप है, जिससे लातीनी शब्द रेडिक्स (मूल) शुरू होता है। एक जमाना था (16-वीं शती), जब मूल का चिन्ह वर्ण R था, इसके बाद q (quadra का पहला वर्ण) या c (cubus का पहला वर्ण) लिखते थे, जो द्योतित करता था कि वर्गमूल निकालना है या घनमूल।[1] उदाहरणार्थ, उस समय आधुनिक चिन्ह

$$\sqrt{4352}$$

की जगह लिखते थे:

$$R.q.\,4352.$$

यदि यह बता दें कि उस जमाने में जोड़-घटाव के भी आधुनिक चिन्ह नहीं थे, इनकी जगह $p.$ (प्लुस) $m.$ (मीनुस) लिखा जाता था, और हमारे कोष्ठकों की जगह चिन्ह $\lfloor\ \rfloor$ प्रयुक्त होते थे, तो स्पष्ट हो जायेगा कि उस समय के बीजगणितीय व्यंजन आधुनिक दृष्टि में कितने अजीब थे।

प्रस्तुत है एक पुराने गणितज्ञ बोमबेली (1572) की पुस्तक से एक उदाहरण:

$$R.c.\lfloor R.q.\ 4352\ p.\,16\rfloor\, m.R.c.\lfloor R.q.\ 4352\ m.\,16\rfloor.$$

अब हम यह व्यंजन नये चिन्हों से लिखते हैं:

$$\sqrt[3]{\sqrt{4352}+16}-\sqrt[3]{\sqrt{4352}-16}.$$

---

[1] माग्नीत्स्की रचित पाठ्य-पुस्तक में, जो हमारे यहां 18-वीं शती के पूरे पूर्वार्ध में पढ़ायी जाती थी, मूलन के लिये कोई विशेष चिन्ह नहीं था।

द्योतन $\sqrt[n]{a}$ के अतिरिक्त अब इसी संक्रिया का एक अन्य द्योतन भी प्रयुक्त होता है: $a^{\frac{1}{n}}$, जो व्यापकीकरण की दृष्टि से बहुत ही सुविधाजनक है: यह दिखाता है कि मूल और कुछ नहीं, एक घात ही है, जिसका निस्थापक एक भिन्नात्मक संख्या है। इसे 16-वीं शती में हालैंड के प्रतिभाशाली गणितज्ञ स्टेविन ने प्रस्तावित किया था।

क्या बड़ा है?

प्रश्न 1

क्या बड़ा है: $\sqrt[5]{5}$ या $\sqrt{2}$?
इसे तथा आगे के प्रश्नों को मूल निकाले बगैर ही हल करना है।

हल

दोनों व्यंजनों का 10-वां घात निकालकर देखते हैं कि

$$(\sqrt[5]{5})^{10}=5^2=25, \qquad (\sqrt{2})^{10}=2^5=32;$$

चूंकि $32>25$, इसलिये

$$\sqrt{2}>\sqrt[5]{5}.$$

प्रश्न 2

क्या बड़ा है: $\sqrt[4]{4}$ या $\sqrt[7]{7}$?

हल

दोनों व्यंजनों का 28-वां घात निकालने पर प्राप्त होता है:

$$(\sqrt[4]{4})^{28}=4^7=2^{14}=2^7\cdot 2^7=128^2,$$
$$(\sqrt[7]{7})^{28}=7^4=7^2\cdot 7^2=49^2.$$

चूंकि $128>49$, इसलिये

$$\sqrt[4]{4}>\sqrt[7]{7}.$$

प्रश्न 3

क्या बड़ा है: $\sqrt{7}+\sqrt{10}$ या $\sqrt{3}+\sqrt{19}$?

हल

दोनों व्यंजनों का वर्ग निकालते हैं:

$$(\sqrt{7}+\sqrt{10})^2=17+2\sqrt{70},$$
$$(\sqrt{3}+\sqrt{19})^2=22+2\sqrt{57}.$$

दोनों व्यंजनों में से 17 घटा लेते हैं; बचेगा

$$2\sqrt{70} \text{ और } 5+2\sqrt{57}.$$

इन व्यंजनों का वर्ग निकालने पर:

$$280 \quad \text{और} \quad 253+20\sqrt{57}.$$

अब दोनों में से 253 घटाकर

$$27 \quad \text{और} \quad 20\sqrt{57}$$

की तुलना करते हैं। चूंकि $\sqrt{57}$ बड़ा है 2 से, इसलिये $20\sqrt{57} > 40$ से; अतः

$$\sqrt{3}+\sqrt{19} > \sqrt{7}+\sqrt{10}.$$

एक नजर में हल

प्रश्न

समीकरण

$$x^{x^3}=3$$

पर ध्यान से एक नजर डालकर बताइये कि x कितने के बराबर है।

हल

बीजगणितीय प्रतीकों को अच्छी तरह आत्मसात कर लेने के बाद कोई भी समझ लेगा कि

$$x=\sqrt[3]{3}$$

यह ठीक भी है, क्योंकि इस स्थिति में

$$x^3=(\sqrt[3]{3})^3=3,$$

इसलिये

$$x^{x^3}=x^3=3$$

होगा और यही सिद्ध करना था।

जिनके लिये यह प्रश्न 'एक नजर में' हल करना कठिन है, उनका काम निम्न विधि से आसान किया जा सकता है।

मान लें

$$x^3 = y,$$

तब

$$x = \sqrt[3]{y}.$$

इससे समीकरण को निम्न रूप दिया जा सकता है:

$$(\sqrt[3]{y})^y = 3,$$

या, घन निकालने पर,

$$y^y = 3^3.$$

स्पष्ट है कि $y=3$ और इसलिये

$$x = \sqrt[3]{y} = \sqrt[3]{3}.$$

बीजगणितीय प्रहसन

प्रश्न 1

छठी गणितीय संक्रिया की सहायता से बहुत अच्छे प्रहसन रचे जा सकते हैं, जैसे $2 \cdot 2 = 5$, $2 = 3$, आदि। मजे की बात यह है कि इन प्रहसनों में कोई बहुत ही छोटी-सी गलती छिपी होती है, जो आसानी से नजर नहीं आती। यहां हम दो प्रहसन प्रस्तुत कर रहे हैं। इनमें से पहले का शीर्षक है:

$$2 = 3$$

मंच पर एक अकाट्य समिका उतरती है:

$$4-10=9-15.$$

अगले 'दृश्य' में समिका के दोनों पक्ष अपने में $6\frac{1}{4}$ की वृद्धि करते हैं:

$$4-10+6\frac{1}{4}=9-15+6\frac{1}{4}.$$

आगे के दृश्यों में निम्न रूपांतरण होते हैं:

$$2^2-2\cdot2\cdot\frac{5}{2}+\left(\frac{5}{2}\right)^2=3^2-2\cdot3\cdot\frac{5}{2}+\left(\frac{5}{2}\right)^2,$$

$$\left(2-\frac{5}{2}\right)^2=\left(3-\frac{5}{2}\right)^2.$$

समिका के दोनों पक्षों का वर्गमूल लेने पर मिलता है:

$$2-\frac{5}{2}=3-\frac{5}{2}.$$

अब दोनों पक्षों में $\frac{5}{2}$ जोड़ दिया जाता है और मिलता है

$$2=3.$$

गलती कहां हुई है?

हल

गलती वहां हुई है, जहां आपने समिका

$$\left(2-\frac{5}{2}\right)^2=\left(3-\frac{5}{2}\right)^2$$

से निष्कर्ष निकाला कि

$$2-\frac{5}{2}=3-\frac{5}{2}.$$

यदि दो वर्ग आपस में बराबर हैं, तो इसका यह मतलब नहीं है कि उनके प्रथम घात भी आपस में बराबर रहे होंगे। आप जानते हैं कि $(-5)^2=5^2$ होता है, पर -5 और 5 तो बराबर नहीं हैं! दो वर्ग उस स्थिति में भी बराबर होते हैं, जब उनके प्रथम घातों के चिन्ह विपरीत रहते हैं। हमारे उदाहरण में यही हुआ था:

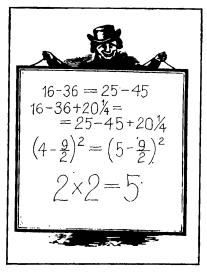
$$\left(-\frac{1}{2}\right)^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2,$$

लेकिन $-\frac{1}{2}$ और $\frac{1}{2}$ बराबर नहीं हैं।

प्रश्न 2

दूसरा बीजगणितीय धोखा (चित्र 16)

चित्र 16

$$2 \cdot 2 = 5$$

भी पिछले उदाहरण जैसी गलती पर आधारित है। मंच पर एक समिका आती है, जिसकी सत्यता में कोई संदेह नहीं हो सकता :

$$16 - 36 = 25 - 45.$$

दोनों तरफ समान संख्या जोड़ी जाती है:

$$16 - 36 + 20\frac{1}{4} = 25 - 45 + 20\frac{1}{4}$$

और निम्न रूपांतरण होते हैं:

$$4^2 - 2 \cdot 4 \cdot \frac{9}{2} + \left(\frac{9}{2}\right)^2 = 5^2 - 2 \cdot 5 \cdot \frac{9}{2} + \left(\frac{9}{2}\right)^2,$$

$$\left(4 - \frac{9}{2}\right)^2 = \left(5 - \frac{9}{2}\right)^2.$$

अब अवैध निष्कर्ष की सहायता से अंतिम दृश्य उभरता है:

$$4 - \frac{9}{2} = 5 - \frac{9}{2},$$

$$4 = 5,$$

$$2 \cdot 2 = 5.$$

इन हास्यास्पद स्थितियों को जान लेने के बाद अब कम अनुभवी गणितज्ञ भी मूल-चिन्ह के अधीन स्थित अज्ञात राशियों वाले समीकरणों के साथ संक्रियाएं संपन्न करने में सावधानी बरतेंगे।

अध्याय 6

द्वितीय घात के समीकरण

हाथ मिलाना

प्रश्न

बैठक के सभी सदस्यों ने आपस में हाथ मिलाया। किसी ने गिना कि 66 हाथ-मिलाई हुई है। बैठक में कितने सदस्य उपस्थित हुए थे ?

हल

बीजगणितीय हल बहुत सरल है। x सदस्यों में से हरेक ने $x-1$ बार हाथ मिलाया, अतः कुल $x(x-1)$ बार हाथ मिले। लेकिन इसमें ध्यान रखने लायक बात यह है कि जब एक सदस्य इवानोव दूसरे सदस्य पेत्रोव से हाथ मिलाता है तो इसी प्रक्रिया में पेत्रोव भी इवानोव से हाथ मिलाता है; अतः इन दो हाथ-मिलाई को एक ही मानना चाहिये। इसीलिये हाथ मिलाने की कुल संख्या $x(x-1)$ की आधी है। अतः समीकरण मिलता है :

$$\frac{x(x-1)}{2}=66$$

या, रूपांतरण के बाद,

$$x^2-x-132=0,$$

जिससे

$$x=\frac{1\pm\sqrt{1+528}}{2},$$

$$x_1=12, \quad x_2=-11.$$

चूंकि दी हुई परिस्थिति में ऋणात्मक हल (—11 आदमी) का कोई वास्तविक अर्थ नहीं है, इसलिये इसे हम छोड़ देते हैं और सिर्फ़ पहला मूल हल के रूप में लेते हैं: बैठक में 12 आदमी भाग ले रहे थे।

मधुमक्खियों का झुंड

प्रश्न

प्राचीन भारत में एक अनोखा खेल प्रचलित था– सरतोड़ प्रश्नों के हल की सार्वजनिक प्रतियोगिता। भारत में गणितीय ग्रंथ भी अंशतः इसी दृष्टिकोण से रचे जाते थे कि उनसे इस बौद्धिक क्रीड़ा-प्रतियोगिता में प्रथम आने में सहायता मिल सके। "यहां दिये गये नियमों से,– इस तरह की एक पुस्तक में आप पढ़ सकते हैं,– बुद्धिमान व्यक्ति हजारों अन्य प्रश्न रच सकता है। जिस तरह सूर्य अपनी चमक से तारों को निस्तेज कर देता है, उसी तरह विद्वान आदमी बीजगणित के प्रश्नों और उत्तरों की सहायता से दूसरों का यश धूमिल कर सकता है"। मूल ग्रंथ में यह बड़े काव्यात्मक ढंग से लिखा गया है, क्योंकि पूरा ग्रंथ ही कविता में है। प्रश्न भी कविता के ही रूप में हैं। इनमें से एक प्रश्न हम गद्य में प्रस्तुत कर रहे हैं।

आधे झुंड के वर्गमूल जितनी मधुमक्खियां $\frac{8}{9}$ झुंड पीछे छोड़कर जूही के फूलों पर बैठ जाती हैं। उस झुंड की सिर्फ एक मधुमक्खी दूर कमल पर आकुल मंडरा रही थी, क्योंकि उसकी बंद पंखुड़ियों में कैद उसकी सहेली उसे आर्त्त स्वर में पुकार रही थी। झुंड में कितनी मधुमक्खियां थीं?

हल

यदि इष्ट संख्या को x से द्योतित किया जाये, तो समीकरण का रूप होगा :

$$\sqrt{\frac{x}{2}}+\frac{8}{9}x+2=x.$$

एक सहायक अज्ञात राशि

$$y=\sqrt{\frac{x}{2}}$$

अपनाकर हम समीकरण को और भी सरल रूप प्रदान कर सकते हैं (क्योंकि इससे $x=2y^2$ हो जाता है) :

$$y+\frac{16y^2}{9}+2=2y^2,$$

या

$$2y^2-9y-18=0.$$

इसे हल करने पर y के दो मान मिलते हैं :

$$y_1=6, \quad y_2=-\frac{3}{2}.$$

अतः x के तदनुरूप मान हुए :

$$x_1=72, \quad x_2=4.5.$$

चूंकि मधुमक्खियों की संख्या पूर्ण और धनात्मक होनी चाहिये, इसलिये प्रश्न को सिर्फ पहला मूल संतुष्ट करता है : झुंड में 72 मधुमक्खियां थीं। जाँचें :

$$\sqrt{\frac{72}{2}}+\frac{8}{9}\cdot 72+2=6+64+2=72.$$

बंदरों का झुंड

प्रश्न

एक और भारतीय प्रश्न प्रस्तुत है:

एक झुंड के बंदर दो समूहों में खेल रहे थे। एक में उनके आठवें भाग के वर्ग जितने बंदर उछल-कूद कर रहे थे, दूसरे में 12 बंदर मिलकर शोर मचा रहे थे। कितने बंदर थे झुंड में?

हल

यदि झुंड में बंदरों की कुल संख्या x थी, तो

$$\left(\frac{x}{8}\right)^2+12=x,$$

जिससे

$$x_1=48, \quad x_2=16.$$

प्रश्न के दो धनात्मक हल हैं: झुंड में 48 बंदर भी हो सकते हैं और 16 भी। दोनों ही उत्तर सही हैं।

दूरदर्शी समीकरण

पिछले प्रश्नों में जो दो हल प्राप्त होते थे, उनके बारे में निर्णय प्रश्न की शर्त्त के अनुसार हम स्वयं लेते थे। पहली स्थिति में हमने ऋण मूल को छोड़ दिया था, जो प्रश्न की शर्त्त पूरा नहीं कर रहा था; दूसरी स्थिति में हमने भिन्नांक में धनात्मक हल छोड़ दिया था; तीसरी में इसके विपरीत हमने दोनों मूलों को अपना लिया था। दूसरा हल भी संभव है, यह बात कभी-कभी हलकर्ता के लिये ही नहीं, प्रश्न-

कर्ता के लिये भी अप्रत्याशित सिद्ध हो सकती है। यहां एक उदाहरण दे रहे हैं, जिसमें समीकरण प्रश्न पढ़ने वाले से ज्यादा दूरदर्शी और समझदार प्रतीत होता है।

गेंद 25 मीटर प्रति सेकेंड वेग से ऊपर फेंकी जाती है। जमीन से 20 मीटर की ऊँचाई पर वह कितने सेकेंड बाद पहुँचेगी?

हल

वात-प्रतिरोध की अनुपस्थिति में ऊपर फेंके गये पिंड के लिये जमीन से उसके उठने की ऊँचाई h, आरंभिक वेग v, गुरुत्वीय त्वरण g और समय t के बीच यांत्रिकी निम्न संबंध स्थापित करती है:

$$h = vt - \frac{gt^2}{2}.$$

दी हुई परिस्थितियों में हम हवा के प्रतिरोध की उपेक्षा कर सकते हैं, क्योंकि वेग कम होने पर प्रतिरोध भी बहुत कम होता है। हिसाब सरल करने के लिये g को $9.8 m/s^2$ नहीं, बल्कि $10 m/s^2$ के बराबर मान लेते हैं (त्रुटि सिर्फ 2% होगी)। ऊपर दिये गये सूत्र में h, v तथा g का मान रखने पर निम्न सूत्र मिलता है:

$$20 = 25t - \frac{10t^2}{2},$$

और सरल करने के बाद

$$t^2 - 5t + 4 = 0.$$

हल करने पर मिलेगा:

$$t_1 = 1 \quad \text{तथा} \quad t_2 = 4.$$

अतः 20m की ऊँचाई पर गेंद दो बार पहुँचेगी: 1 सेकेंड बाद और 4 सेकेंड बाद।

यह असंभव सा लगता है और हम बिना कुछ सोचे-समझे दूसरा हल फेंक देने को तैयार हो जाते हैं। लेकिन ऐसा करना गलत होगा! दूसरा हल भी पूर्णतया सार्थक है; गेंद 20 मीटर की ऊँचाई पर सचमुच दो बार पहुँचती है: एक बार ऊपर उठते वक्त और दूसरी बार नीचे गिरते वक्त। आप आसानी से कलन कर सकते हैं कि आरंभिक वेग 25 मीटर प्रति सेकेंड होने पर गेंद 2.5 सेकेंड तक ऊपर उठेगी और 31.25 मीटर की ऊँचाई तक पहुँचेगी। एक सेकेंड में 20m की ऊँचाई तक पहुँचकर 1.5 सेकेंड तक और ऊपर उठना जारी रखेगी, फिर इतने ही समय बाद वह वापस 20 मीटर की ऊँचाई तक गिरेगी और इसके एक सेकेंड बाद जमीन पर पहुँच जायेगी।

ऐलर का प्रश्न

स्टेंडाल अपनी "आत्मकथा" में अपने छात्र-जीवन का एक किस्सा लिखते हैं:

"मुझे उनके पास (गणित के अध्यापक के पास) ऐलर की कृति और अंडों के बारे में ऐलर का एक प्रश्न मिला, जिन्हें किसान बाजार ले जा रहे थे... यह मेरे लिये एक खोज थी। तभी मैं समझा कि अलजबरा नामक अस्त्र से कितना लाभ है। लेकिन खेद है कि मुझे किसी ने इसके बारे में बताया नहीं..."

ऐलर की "अलजबरा-प्रवेश" नामक पुस्तक का वह प्रश्न हम यहां दे रहे हैं, जिसने युवा स्टेंडाल पर इतनी गहरी छाप डाली थी।

दो किसान कुल मिलाकर 100 अंडे बाजार ले गये। एक के पास अधिक अंडे थे और दूसरे के पास कम। बेचने पर दोनों को समान राशियां मिलीं। एक ने दूसरे से कहा: "यदि मेरे पास तुम्हारे अंडे होते, तो मुझे 15 क्रेइसर मिलते"। इस पर दूसरे ने जवाब दिया:

'यदि मेरे पास तुम्हारे अंडे होते, तो मुझे $6\frac{2}{3}$ क्रेइसर मिलते। कितने-कितने अंडे थे दोनों के पास?

हल

मान लें कि पहले किसान के पास x अंडे थे, तो दूसरे के पास $100-x$ अंडे थे। यदि पहले के पास $100-x$ अंडे होते, तो हम जानते है कि बेचने पर उसे 15 क्रेइसर मिलते। इसका मतलब है कि उसने प्रति अंडा

$$\frac{15}{100-x}$$

की दर से बेंचे हैं।

इस तरह से हम देखते हैं कि दूसरे किसान ने अंडे निम्न मूल्य पर बेचे हैं।

$$6\frac{2}{3}:x=\frac{20}{3x}.$$

अब निर्धारित करते हैं कि हर किसान को कितनी राशि मिली है:

$$\text{पहले को: } x\cdot\frac{15}{100-x}=\frac{15x}{100-x},$$

$$\text{दूसरे को: } (100-x)\cdot\frac{20}{3x}=\frac{20(100-x)}{3x}.$$

पर ये राशियां आपस में बराबर हैं:

$$\frac{15x}{100-x}=\frac{20(100-x)}{3x}.$$

रूपांतरण के बाद:

$$x^2+160x-8000=0,$$

जिससे

$$x_1=40, \quad x_2=-200.$$

ऋणात्मक मूल प्रत्त स्थिति में निरर्थक है; प्रश्न का सिर्फ एक हल है: पहले किसान के पास 40 अंडे थे और इसलिये दूसरे के पास 60 अंडे थे।

प्रश्न एक अन्य विधि से भी हल हो सकता है, जो काफी छोटी है। यह विधि अधिक अक्लमंदी की है, पर इसे ढूंढ़ना कठिन है।

मान लें कि दूसरे किसान के पास पहले की तुलना में k गुना अधिक अंडे थे। बेचने पर दोनों ने समान राशियां पायीं; इसका मतलब है कि पहले किसान ने अपने अंडों को k गुना महंगा बेचा है, बनिस्बत कि दूसरे ने। यदि बेचने के पहले दोनों ने अपने-अपने अंडों की अदला-बदली कर ली होती, तो पहले किसान के पास k गुना अधिक अंडे होते और उन्हें वह k गुना महंगा बेचता। इसका मतलब है कि उसके पास k^2 गुना अधिक राशि होती, बनिस्बत कि दूसरे के पास। अतः

$$k^2 = 15 : 6\frac{2}{3} = \frac{45}{20} = \frac{9}{4};$$

जिससे

$$k = \frac{3}{2}.$$

अब 100 अंडों को 3:2 के अनुपात में बाँटना रह जाता है। आप आसानी से ज्ञात कर ले सकते हैं कि पहले किसान के पास 40 अंडे थे और दूसरे के पास 60 अंडे थे।

लाउड स्पीकर

प्रश्न

मैदान में 5 लाउड स्पीकर दो समूहों में बंधे हैं: 3 एक खंभे से और 2 उससे 50m दूर स्थित खंभे से। किस जगह खड़ा हुआ जाये कि दोनों समूहों से समान शक्ति की ध्वनि सुनाई दे?

हल

यदि छोटे समूह से इष्ट बिन्दु की दूरी x है, तो बड़े समूह से उसकी दूरी $50-x$ होगी (चित्र 17)। हम जानते हैं कि ध्वनि दूरी के वर्ग के अनुपात में क्षीण होती है, अतः समीकरण बनता है :

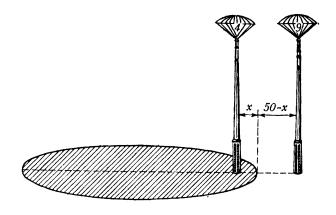
$$\frac{2}{3}=\frac{x^2}{(50-x)^2}$$

जिसे निम्न रूप में लिख सकते हैं :

$$x^2+200x-5000=0$$

हल करने पर दो मूल प्राप्त होते हैं :

$$x_1=22.5,$$
$$x_2=-222.5.$$

धनात्मक मूल प्रश्न का सीधा उत्तर है : समान श्रव्यता का बिन्दु

चित्र 17

दो लाउड स्पीकरों के समूह से 22.5m की दूरी पर है और इसीलिये तीन लाउड स्पीकरों के समूह से 27.5m की दूरी पर है।

लेकिन समीकरण का ऋणात्मक मूल क्या दिखाता है? यही कि समान श्रव्यता का दूसरा बिन्दु उस दिशा की विपरीत दिशा में स्थित है, जिसे हमने धनात्मक माना था।

दो लाउड स्पीकरों वाले खंभे से आवश्यक दिशा में 222.5m की दूरी नाप लें; आपको वह बिन्दु मिलेगा, जहां लाउड स्पीकरों के दोनों समूहों से समान शक्ति की ध्वनि सुनाई देगी। तीन लाउड स्पीकरों के समूह से यह बिन्दु 222.5m + 50m = 272.5m दूर है।

इस प्रकार हमने समान श्रव्यता के दो बिन्दु प्राप्त किये; दोनों बिन्दु ध्वनि-स्रोतों को मिलाने वाली सरल रेखा पर हैं। इस तरह के अन्य बिन्दु इस सरल रेखा पर नहीं हैं, पर इस सरल रेखा के बाहर जरूर हैं। सिद्ध किया जा सकता है कि हमारे प्रश्न की मांग संतुष्ट करने वाले बिन्दुओं का ज्यामितिक स्थान वृत्त की परिधि है, जो अभी-अभी प्राप्त बिन्दुओं से गुजरती है (अर्थात् दोनों बिन्दुओं को मिलाने वाले रेखाखंड को व्यास मानकर खींचे गये वृत्त की परिधि ही इष्ट बिन्दुओं का ज्यामितिक स्थान है)। वृत्त का क्षेत्र बहुत ही बड़ा है (चित्र में उसे लाइनदार बना दिया गया है)। इसके भीतर दो लाउड स्पीकरों के समूह की ध्वनि अधिक तेज होती है बनिस्बत कि तीन लाउड स्पीकरों के समूह की। वृत्त के बाहर उलटी संवृत्ति प्रेक्षित होती है।

चांद की उड़ान का बीजगणित

जिस प्रकार हमने लाउड स्पीकरों के दो तंत्रों की समान श्रव्यता का बिन्दु ढूंढ़ा है, ठीक उसी तरह से हम दो आकाशीय पिंडों – पृथ्वी

ग्रौर चांद – द्वारा ग्रंतरिक्ष-यान पर समान गुरुत्वाकर्षण-बल लगने के बिन्दु भी ज्ञात कर सकते हैं। ग्राइये, इन बिन्दुग्रों को ढूंढ़ते हैं।

न्यूटन के नियमानुसार दो पिंडों का परस्पर ग्राकर्षण उनके द्रव्यमानों का समानुपाती ग्रौर उनकी ग्रापसी दूरी के वर्ग का व्युत्क्रमानुपाती होता है। यदि पृथ्वी का द्रव्यमान M है ग्रौर उससे राकेट की दूरी x है, तो जिस बल से पृथ्वी राकेट के हर ग्राम को ग्राकर्षित करती है, वह निम्न व्यंजन द्वारा व्यक्त होगा :

$$\frac{Mk}{x^2},$$

जहां k वह बल है, जिससे एक ग्राम (द्रव्यमान वाला पिंड) ग्रपने से 1cm दूर स्थित एक ग्राम (द्रव्यमान वाले पिंड) को ग्राकर्षित करता है।

उसी बिन्दु पर चांद राकेट के हर ग्राम को जिस बल से ग्राकर्षित करता है, वह है

$$\frac{mk}{(l-x)^2},$$

जहां m चांद का द्रव्यमान है, l चांद से पृथ्वी की दूरी है (यानी चांद ग्रौर पृथ्वी के केंद्रों को मिलाने वाली सरल रेखा पर स्थित है)। प्रश्न की शर्त्त के ग्रनुसार

$$\frac{Mk}{x^2}=\frac{mk}{(l-x)^2}$$

या

$$\frac{M}{m}=\frac{x^2}{l^2-2lx+x^2}.$$

ज्योतिर्विज्ञान से हमें ज्ञात है कि ग्रनुपात $\frac{M}{m}$ लगभग 81.5 के बराबर है, ग्रतः

$$\frac{x^2}{l^2-2lx+x^2}=81.5,$$

जिससे

$$80.5x^2 - 163.0lx + 81.5l^2 = 0.$$

समीकरण को x के सापेक्ष हल करने पर

$$x_1 = 0.9l, \quad x_2 = 1.12l.$$

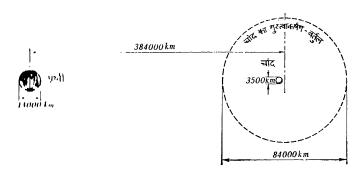
लाउड स्पीकरों के प्रश्न की तरह यहां भी निष्कर्ष निकलता है कि पृथ्वी तथा चांद को मिलाने वाली सरल रेखा पर दो इष्ट बिन्दु हैं, जिनपर अंतरिक्ष-यान चांद और पृथ्वी दोनों की ओर से समान गुरुत्वाकर्षण-बल अनुभव करता है। इनमें से एक बिन्दु पृथ्वी के केंद्र से $0.9l$ की दूरी पर पृथ्वी और चांद के बीच में है और दूसरा बिन्दु वहीं (पृथ्वी के केंद्र) से $1.12l$ की दूरी पर (चांद से कुछ आगे) है। चूंकि पृथ्वी और चांद के बीच की दूरी लगभग 384 000km है, इसलिये एक इष्ट बिन्दु पृथ्वी के केंद्र से 346 000km दूर है और दूसरा इष्ट बिन्दु 430000km दूर है।

लेकिन पिछले प्रश्न से हम जानते हैं कि प्राप्त बिन्दुओं को व्यास के सिरे मानकर खींची गयी परिधि के सभी बिन्दु यही गुण रखते हैं। पृथ्वी और चांद के केंद्रों को मिलाने वाली रेखा के गिर्द इस परिधि को घूर्णन देने पर हमें एक वर्तुल (गोले) की सतह मिलेगी, जिसके सभी बिन्दु प्रश्न की शर्त्त को संतुष्ट करेंगे।

इस वर्तुल को चांद के गुरुत्वाकर्षण का वर्तुल कहते हैं (चित्र 18) और इसका व्यास है

$$1.12l - 0.9l = 0.22l \approx 84000 \text{ km}.$$

लोगों में एक गलत धारणा प्रचलित है कि चांद पर राकेट भेजने

के लिये उसे चांद के गुरुत्वाकर्षण-वर्तुल में प्रविष्ट करा देना ही काफी है। प्रथम दृष्टि में यही लगता है कि यदि राकेट गुरुत्वाकर्षण-वर्तुल में पहुंच जायेगा (और यदि उसका वेग बहुत ज्यादा नहीं होगा), तो वह अवश्य ही चांद की सतह पर जा गिरेगा, क्योंकि इस वर्तुल के

चित्र 18

भीतर चांद का गुरुत्वाकर्षण पृथ्वी के गुरुत्वाकर्षण से अधिक होता है। पर यदि ऐसा होता, तो चांद की उड़ान काफी सरल हो जाती; राकेट का निशाना चांद पर नहीं लगाना पड़ता, जिसका अनुप्रस्थ व्यास आकाश में सिर्फ $\frac{1}{2}^{\circ}$ के कोण में दिखता है, बल्कि 84 000 km व्यास वाले गोले पर लगाना पड़ता, जिसकी कोणिक माप 12° है।

लेकिन इस तरह के विचारों को गलत सिद्ध करना बहुत आसान है।

मान लें कि पृथ्वी से छोड़ा गया राकेट पार्थिव गुरुत्वाकर्षण के कारण धीरे-धीरे अपना वेग खोता हुआ चांद के गुरुत्वाकर्षण-वर्तुल

में शून्य वेग के साथ प्रविष्ट हो जाता है। क्या वह चांद पर गिरेगा? कभी नहीं।

पहली बात यह है कि चांद के गुरुत्वाकर्षण-वर्तुल के भीतर पार्थिव गुरुत्वाकर्षण लुप्त नहीं हो जाता, वह वहां भी क्रियाशील रहता है। इसीलिये पृथ्वी और चांद को मिलाने वाली रेखा से परे बिन्दुओं पर चांद का गुरुत्वाकर्षण पार्थिव गुरुत्वाकर्षण को परास्त नहीं करता है, बल्कि उसके साथ बल-समांतर चतुर्भुज के नियमानुसार जुड़ जाता है। दोनों गुरुत्वाकर्षण-बलों का परिणामी बल चांद की ओर निर्दिष्ट नहीं होगा (होगा भी, तो सिर्फ पृथ्वी और चांद के केंद्रों को मिलाने वाली सरल रेखा पर)।

दूसरी (और सबसे महत्त्वपूर्ण) बात यह है कि खुद चांद कोई अचल लक्ष्य नहीं होता। यदि हम यह जानना चाहते हैं कि राकेट किस तरह से चांद की ओर चलायमान होगा (उस पर 'गिरेगा' या नहीं), तो चांद के सापेक्ष भी राकेट के वेग को ध्यान में रखना पड़ेगा। यह वेग शून्य के बराबर नहीं है, क्योंकि खुद चांद पृथ्वी के गिर्द 1km/s वेग से चलता रहता है। इसलिये चांद के सापेक्ष राकेट की गति इतनी बड़ी है कि चांद अपने गुरुत्वाकर्षण-वर्तुल के पास राकेट के पहुँचने के पहले ही उसकी गति को इतना प्रभावित करने लगता है, कि उसकी उपेक्षा नहीं की जा सकती। आकाशीय प्रक्षेपिकी में चांद के गुरुत्वाकर्षण की गणना उसी क्षण से शुरू हो जाती है, जब राकेट चांद के तथाकथित कार्य-क्षेत्र में प्रविष्ट हो जाता है, जिसकी त्रिज्या 66 000km है। यहां से चांद के सापेक्ष राकेट की गति के अध्ययन में पार्थिव गुरुत्वाकर्षण की पूरी तरह उपेक्षा की जा सकती है। सिर्फ इस बात को ठीक से ध्यान में रखना होगा कि राकेट किस वेग से (चांद के सापेक्ष) चांद के कार्य-क्षेत्र में प्रविष्ट होता है। इसीलिये स्वाभाविक है कि राकेट को ऐसे पथ पर भेजना

पड़ता है कि चांद के कार्य-क्षेत्र में प्रवेश के क्षण चांद के सापेक्ष उसका वेग सीधा चांद की ओर निर्दिष्ट हो। इसके लिये कार्य-क्षेत्र को राकेट के ठीक सामने होना चाहिये। इस तरह हम देखते हैं कि चांद पर राकेट से निशाना लगाना इतना आसान काम नहीं है, जितना 84 000 km व्यास वाले गोले पर निशाना लगाने में होना चाहिये था।

"कठिन प्रश्न"

बोग्दानोव-बेल्स्की का 'कठिन प्रश्न' नामक चित्र बहुतों ने देखा होगा, लेकिन चित्र में दिखाये गये 'कठिन प्रश्न' पर बहुत कम लोगों ने गौर किया होगा। प्रश्न एक मौखिक कलन है:

$$\frac{10^2+11^2+12^2+13^2+14^2}{365}=?$$

प्रश्न सचमुच कठिन है। लेकिन उस शिक्षक के शिष्य इसे सरलतापूर्वक हल कर लेते थे, जिनसे चित्र के शिक्षक का चेहरा मिलता-जुलता है। ये प्रकृतिविज्ञानों के प्रोफेसर से० राछींस्की हैं, जो विश्वविद्यालय छोड़कर गाँव के स्कूल में बच्चों को पढ़ाने लगे थे। प्रतिभावान शिक्षक संख्याओं के गुणों पर आधारित मौखिक कलन का अभ्यास कराते थे। संख्या 10, 11, 12, 13, 14 में निम्न गुण है:

$$10^2+11^2+12^2=13^2+14^2.$$

चूंकि $100+121+144=365$ है, इसलिये आसानी से हिसाब लगा सकते हैं कि बोर्ड पर लिखे प्रश्न का उत्तर 2 है।

बीजगणित ऐसे साधन प्रस्तुत करता है, जिनकी सहायता से हमसंख्या-क्रम की इस विशेषता के प्रश्न को अधिक व्यापक रूप में रख सकते हैं: क्या पाँच क्रमिक संख्याओं की यह एकमात्र कतार है, जिसमें प्रथम तीन संख्याओं के वर्गों का योग अंतिम दो संख्याओं के वर्गों के योग के बराबर होता है, या नहीं?

चित्र 19

हल

प्रथम इष्ट संख्या को x मानने पर समीकरण बनता है:

$$x^2+(x+1)^2+(x+2)^2=(x+3)^2+(x+4)^2.$$

लेकिन x से प्रथम संख्या को नहीं, दूसरी संख्या को द्योतित करना अधिक सुविधाजनक रहेगा। इससे समीकरण का रूप सरल हो जायेगा:

$$(x-1)^2+x^2+(x+1)^2=(x+2)^2+(x+3)^2.$$

कोष्ठक खोलकर सरल करने पर:

$$x^2-10x-11=0,$$

जिससे

$$x=5\pm\sqrt{25+11}; \quad x_1=11, \quad x_2=-1.$$

इसलिये इष्ट गुण रखने वाले दो संख्या-क्रम हैं: राछींस्की का

$$10, \ 11, \ 12, \ 13, \ 14$$

और क्रम

$$-2, \ -1, \ 0, \ 1, \ 2,$$

क्योंकि

$$(-2)^2+(-1)^2+0^2=1^2+2^2.$$

कौनसी संख्याएं

प्रश्न

तीन क्रमिक संख्याएं ढूंढ़ें, जिनमें बीच वाले का वर्ग बाकी के गुणनफल से 1 अधिक हो।

हल

यदि प्रथम इष्ट संख्या x है, तो समीकरण का रूप होगा

$$(x+1)^2=x(x+2)+1.$$

विकोष्ठन के बाद समिका मिलती है :

$$x^2+2x+1=x^2+2x+1,$$

जिससे x का मान निर्धारित करना संभव नहीं है। इसका मतलब है कि हमारी समिका एक तादात्म्य है; वह उसमें उपस्थित वर्णों के किसी भी मान के लिये सत्य है, न कि सिर्फ कुछ मानों के लिये ही, जैसा कि समीकरणों में होता है। अतः कोई भी तीन क्रमिक संख्याएं प्रश्न की शर्त्त पूरा कर सकती हैं। सचमुच, आप कोई भी तीन क्रमिक संख्याएं ले लीजिये, जैसे

$$17,\ 18,\ 19.$$

हम देख सकते हैं कि

$$18^2-17\cdot 19=324-323=1.$$

इस तरह के संबंध की अनिवार्यता और भी स्पष्ट नजर आयेगी, यदि आप x से दूसरी संख्या को द्योतित करेंगे। इस स्थिति में आपको समिका मिलेगी :

$$x^2-1=(x+1)(x-1),$$

जो स्पष्टतः एक तादात्म्य है (तादात्म्य को समात्मिका भी कहते हैं)।

अध्याय 7

अधिकतम और अल्पतम मान

इस अध्याय में हम बहुत ही रोचक प्रकार के प्रश्न प्रस्तुत कर रहे हैं, जो किसी राशि के अधिकतम या अल्पतम मानों की खोज से संबंधित हैं। इन्हें कई विधियों से हल किया जा सकता है, जिनमें से एक के साथ हम आपका परिचय करायेंगे।

रूसी गणितज्ञ चेबीशेव ने अपनी कृति "भौगोलिक मान-चित्र" में लिखा था कि विज्ञान में वे विधियां विशेष रूप से महत्त्वपूर्ण हैं, जो आदमी के व्यावहारिक कार्यकलापों की एक सर्वसामान्य समस्या हल कर सकती हैं: साधनों का किस तरह से उपयोग किया जाये कि लाभ अधिकतम हो।

दो रेलगाड़ियां

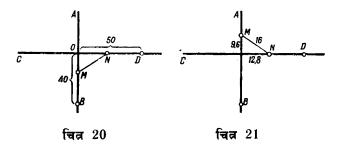
प्रश्न

दो रेलपथ एक-दूसरे को समकोण पर काटते हैं। कटान-बिन्दु की ओर इन पथों पर दो रेलगाड़ियां एक साथ चली हैं: एक गाड़ी कटान-बिन्दु से 40km दूर स्थित स्टेशन से और दूसरी – कटान-बिन्दु से 50km दूर स्थित स्टेशन से। पहली गाड़ी प्रति मिनट 800m चल रही है और दूसरी गाड़ी प्रति मिनट 600m चल रही है।

प्रस्थान-क्षण के कितने मिनट बाद दोनों के इंजन एक-दूसरे से अल्पतम दूरी पर आये होंगे? इस दूरी का मान क्या होगा?

हल

रेलगाड़ियों की गति का आरेख खींचते हैं। मान लें कि AB और CD दो पथ हैं, जो बिन्दु O पर एक दूसरे को काटते हैं (चित्र 20)। बिन्दु O से 40km की दूरी पर स्टेशन B है और 50km की दूरी पर स्टेशन D है। यह भी मान लें कि x मिनट बाद इंजन एक-दूसरे से अल्पतम दूरी $MN=m$ पर आते हैं। B से चली गाड़ी इस क्षण तक पथ $BM=0.8x$ दूरी करती है। अतः $OM=40-$

चित्र 20 चित्र 21

$-0.8x$ है। ठीक इसी तरह ज्ञात करते हैं कि $ON=50-0.6x$ है। पीथागोरस के साध्य से

$$MN=m=\sqrt{\overline{OM}^2+\overline{ON}^2}=\sqrt{(40-0.8x)^2+(50-0.6x)^2}$$

समीकरण

$$m=\sqrt{(40-0.8x)^2+(50-0.6x)^2}$$

दोनों पक्षों का वर्ग लेने पर :

$$x^2 - 124x + 4100 - m^2 = 0.$$

इस समीकरण को x के सापेक्ष हल करते हैं, जिससे :

$$x = 62 \pm \sqrt{m^2 - 256}.$$

चूंकि x से हम बीते हुए मिनटों की संख्या द्योतित कर रहे हैं, इसलिये वह काल्पनिक नहीं हो सकता, अर्थात् $m^2 - 256$ कोई धनात्मक राशि ही हो सकता है या शून्य के बराबर हो सकता है। अंतिम स्थिति m के अल्पतम मान के अनुरूप है, अत:

$$m^2 = 256 \quad \text{अर्थात्} \quad m = 16.$$

स्पष्ट है कि m का मान 16 से कम नहीं हो सकता, अन्यथा x का मान काल्पनिक हो जायेगा। और $m^2 - 256 = 0$ होने पर $x = 62$ मिलता है।

इस प्रकार, दोनों इंजन 62 मिनट बाद एक-दूसरे के सबसे नजदीक आयेंगे और इस क्षण उनकी आपसी दूरी 16km होगी।

अब निर्धारित करते हैं कि इस क्षण वे कहां स्थित हैं। पहले लंबाई OM का कलन करते हैं :

$$40 - 62 \cdot 0.8 = -9.6.$$

ऋण चिन्ह का अर्थ है कि इंजन कटान-बिन्दु पार करके 9.6km दूर चल चुका होगा। दूरी ON है

$$50 - 62 \cdot 0.6 = 12.8,$$

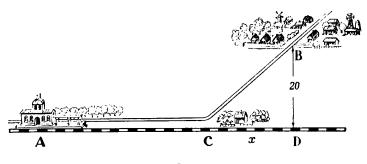
अर्थात् दूसरा इंजन कटान-बिन्दु से 12.8km तक ही पहुँचा होगा।

इंजनों की स्थितियां चित्र 21 में दिखायी गयी हैं। आप देख रहे हैं कि वे ऐसी नहीं हैं, जैसा हम प्रश्न हल करने के पहले सोच रहे थे। समीकरण पर्याप्त 'सहनशील' निकला – उसने आरेख गलत होने पर भी उत्तर बिल्कुल सही दिया। ऐसी 'सहनशीलता' कहां से आयी? – जाहिर है कि चिन्हों के बीजगणितीय नियमों से।

हाल्ट कहां बने?

प्रश्न

ऋजु रेलपथ से 20km हटकर एक गाँव B है। रेलगाड़ी का हाल्ट C कहां बनाया जाये कि स्टेशन A से B तक पहुँचने में रेल-

चित्र 22

पथ AC और सड़क CB पर कुल मिलाकर अल्पतम समय खर्च हो? रेलपथ पर वेग प्रति मिनट 0.8km है और सड़क पर प्रति मिनट 0.2km है।

हल

[illegible] D (AD पर लंब BD के आधार-बिन्दु) की दूरी AD [illegible] द्योतित करते हैं और CD को x से। तब $AC = AD - CD =$ [illegible] होगा और $CB = \sqrt{CD^2 + BD^2} = \sqrt{x^2 + 20^2}$ होगा। [illegible] AC तय करने में रेलगाड़ी को समय लगता है –

$$\frac{AC}{0.8} = \frac{a-x}{0.8}.$$

सड़क CB तय करने में समय लगता है –

$$\frac{CB}{0.2} = \frac{\sqrt{x^2+20^2}}{0.2}.$$

A से B तक पहुँचने में कुल समय लगेगा :

$$\frac{a-x}{0.8} + \frac{\sqrt{x^2+20^2}}{0.2}.$$

इस योगफल को m से द्योतित करते हैं; इसे अल्पतम होना चाहिये। समीकरण

$$\frac{a-x}{0.8} + \frac{\sqrt{x^2+20^2}}{0.2} = m$$

को निम्न रूप में लिखते हैं :

$$-\frac{x}{0.8} + \frac{\sqrt{x^2+20^2}}{0.2} = m - \frac{a}{0.8}.$$

दोनों पक्षों में 0.8 से गुणा करने पर :

$$-x+4\sqrt{x^2+20^2}=0.8m-a.$$

$0.8m-a$ को k से द्योतित करके मूल के चिन्ह से छुटकारा पाने पर निम्न वर्ग-समीकरण मिलेगा :

$$15x^2-2kx+6400-k^2=0,$$

जिससे

$$x=\frac{k\pm\sqrt{16k^2-96000}}{15}.$$

चूंकि $k=0.8m-a$ है, इसलिये m का मान अल्पतम होने पर k का मान भी अल्पतम होता है, और इसका विलोम।[1] लेकिन x का मान वास्तविक हो, इसके लिये जरूरी है कि $16k^2$ का मान 96 000 से कम न हो। इसका मतलब है कि $16k^2$ का अल्पतम मान 96 000 है। अतः m अल्पतम होगा, जब

$$16k^2=96000,$$

जिससे

$$k=\sqrt{6000},$$

इसीलिये

$$x=\frac{k\pm0}{15}=\frac{\sqrt{6000}}{15}\approx5.16.$$

---

[1] यह ध्यान में रखना चाहिये कि $k>0$, क्योंकि

$$0.8m=a-x+4\sqrt{x^2+20^2}>a-x+x=a.$$

लंबाई $a=AD$ चाहे जी हो, हाल्ट को बिन्दु D से करीब 5km दूर बनाना चाहिये।

एक बात और। जाहिर है कि हमारा प्रश्न तभी अर्थपूर्ण होगा, जब $x<a$ होगा, क्योंकि समीकरण बनाते वक्त हमने $a-x$ को धनात्मक संख्या मानी थी।

यदि $x=a\approx 5.16$ है, तो हाल्ट बनाने की जरूरत ही नहीं है, सड़क सीधा A से B तक बनानी होगी। यदि दूरी a का मान 5.16km से कम होगा, तब भी यही करना होगा।

लेकिन इस बार हम समीकरण से अधिक समझदार निकले। यदि हम अंधाधुंध समीकरण की बात मान लेते, तो हमें विचाराधीन स्थिति में हाल्ट स्टेशन A के पार बनाना पड़ता, जो बिल्कुल ही निरर्थक है: इस स्थिति में $x>a$, इसलिये रेलपथ तय करने में व्यय समय

$$\frac{a-x}{0.8}$$

ऋणात्मक है। उदाहरण शिक्षाप्रद है, क्योंकि यह दिखाता है कि गणितीय विधियों का उपयोग करते वक्त प्राप्त परिणाम की व्याख्या सोच-समझ कर करनी चाहिये; यह याद रखना चाहिये कि कोई भी गणितीय विधि जिन पूर्वमान्यताओं पर आधारित होती है, उनकी पूर्त्ति नहीं होने पर परिणाम वास्तविक अर्थ खो बैठते हैं।

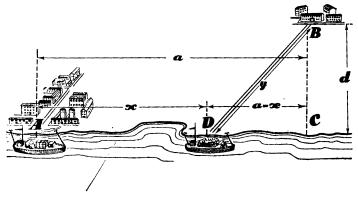
सड़क कैसे बनायी जाये?

प्रश्न

नदी के किनारे एक शहर A से धारा की दिशा में a किलोमीटर दूर और तट से d किलोमीटर दूर एक शहर B है (चित्र 23)। शहर

B से तट की ओर सड़क कैसे बनायी जाये कि B तक माल ढोने में अल्पतम खर्च लगे? नदी पर प्रति टन-किलोमीटर ढुलाई का खर्च सड़क पर ढुलाई से दुगुना कम है।

चित्र 23

हल

दूरी AD को x से और सड़क की लंबाई DB को y से द्योतित करते हैं; पूर्वमान्यता के अनुसार लंबाई AC बराबर a है और लंबाई BC बराबर d है।

चूंकि सड़क पर ढुलाई-खर्च दो गुना महंगा है, इसलिये योगफल

$$x+2y$$

को प्रश्न की मांग के अनुसार अल्पतम होना चाहिये। इस अल्पतम मान को m से द्योतित करते हैं। समीकरण बनता है:

$$x+2y=m.$$

लेकिन $x=a-DC$, $DC=\sqrt{y^2-d^2}$; इसलिये हमारे समीकरण का रूप होगा :

$$a-\sqrt{y^2-d^2}+2y=m$$

या, मूल के चिन्ह से छुटकारा पाने पर :

$$3y^2-4(m-a)y+(m-a)^2+d^2=0.$$

इसे हल करते हैं :

$$y=\frac{2}{3}(m-a)\pm\frac{\sqrt{(m-a)^2-3d^2}}{3}.$$

y का मान वास्तविक हो, इसके लिये जरूरी है कि $(m-a)^2$ का मान $3d^2$ से कम न हो। $(m-a)^2$ का अल्पतम मान $3d^2$ के बराबर है, अत :

$$m-a=d\sqrt{3}, \quad y=\frac{2(m-a)+0}{3}=\frac{2d\sqrt{3}}{3};$$

$\sin\angle BDC=d:y$, अर्थात्

$$\sin\angle BDC=\frac{d}{y}=d:\frac{2d\sqrt{3}}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

पर जिस कोण की ज्या $\frac{\sqrt{3}}{2}$ के बराबर है, उसका मान $60°$ है। इसका मतलब है कि दूरी AC चाहे जो भी हो, सड़क नदी के साथ $60°$ के कोण पर बनानी चाहिये।

यहां भी उसी विशेषता से पाला पड़ रहा है, जिससे पिछले प्रश्न में पड़ा था। हल सिर्फ नियत परिस्थितियों में अर्थ रखता है। यदि

शहर B की स्थिति ऐसी हो कि वहां से तट के साथ $60°$ के कोण पर बनी सड़क नदी के साथ शहर A के दूसरी तरफ मिले, तो हल का कोई उपयोग नहीं रहेगा; ऐसी स्थिति में शहर A को शहर B के साथ सीधा सड़क से ही जोड़ना चाहिये, नदी का उपयोग नहीं करना चाहिये।

गुणनफल कब अधिकतम होता है?

'उच्चिष्ठ और निम्निष्ठ', अर्थात् अधिकतम और निम्नतम (अल्पतम) मान ढूंढ़ने से संबंधित अनेक प्रश्नों के हल में एक बीज-गणितीय साध्य का सफलतापूर्वक प्रयोग किया जा सकता है, जिससे हम आपका परिचय कराने जा रहे हैं। निम्न प्रश्न देखें:

प्रश्न

प्रत्त संख्या को किस तरह दो खंडों में बाँटा जाये कि उनका गुणनफल अधिकतम हो?

हल

मान लें कि प्रत्त संख्या a है। जिन दो खंडों में इसे बाँटा गया है, उन्हें निम्न रूप में व्यक्त कर सकते हैं:

$$\frac{a}{2}+x \quad \text{और} \quad \frac{a}{2}-x$$

संख्या x दिखाती है कि ये खंड संख्या a के आधे से कितना अंतर रखते हैं। दोनों खंडों का गुणनफल है:

$$\left(\frac{a}{2}+x\right)\left(\frac{a}{2}-x\right)=\frac{a^2}{4}-x^2.$$

स्पष्ट है कि लिये गये खंडों का गुणनफल उतना ही अधिक होगा, जितना x का मान कम होगा, अर्थात् ज़ितना इन खंडों का अंतर कम होगा। अधिक गुणनफल तब मिलता है, जब $x=0$ होता है, अर्थात् जब दोनों ही खंड $\frac{a}{2}$ के बराबर होते हैं।

इस प्रकार, संख्या को आधा-आधा बाँटना चाहिये; स्थिर योगफल रखने वाली दो राशियों का गुणनफल तभी अधिकतम होता है, जब वे आपस में बराबर होती हैं।

अब यही प्रश्न तीन राशियों के लिये देखें।

प्रश्न

प्रत्त संख्या को तीन खंडों में किस तरह बाँटा जाये कि उनका गुणनफल अधिकतम हो?

हल

इस प्रश्न के हल में पिछले का सहारा लेंगे।

मान लें कि a को तीन खंडों में बाँट दिया गया है। पहले यह मानें कि एक भी खंड $\frac{a}{3}$ के बराबर नहीं है! तब उनके बीच एक खंड जरूर होगा, जो $\frac{a}{3}$ से बड़ा हो (तीनों खंड $\frac{a}{3}$ से कम नहीं हो सकते); इसे निम्न व्यंजन से व्यक्त करते हैं:

$$\frac{a}{3}+x.$$

इसी तरह, $\frac{a}{3}$ से छोटा खंड भी जरूर होगा; इसे निम्न व्यंजन से व्यक्त करते हैं:

$$\frac{a}{3}-y.$$

संख्याएं x और y धनात्मक हैं। तीसरा खंड जाहिर है कि निम्न के बराबर होगा:

$$\frac{a}{3}+y-x.$$

संख्या $\frac{a}{3}$ और $\frac{a}{3}+x-y$ का योगफल उतना ही है जितना a के प्रथम दो खंडों का, और उनका अंतर, अर्थात् $x-y$, प्रथम दो खंडों के अंतर $(x+y)$ से कम है। अतः पिछले प्रश्न के आधार पर हम यहां भी निष्कर्ष निकालते हैं कि गुणनफल

$$\frac{a}{3}\left(\frac{a}{3}+x-y\right)$$

अधिक है, बनिस्बत कि संख्या a के प्रथम दो खंडों का गुणनफल।

इस प्रकार, यदि संख्या a के प्रथम दो खंडों की जगह संख्याएं

$$\frac{a}{3} \text{ और } \frac{a}{3}+x-y$$

ली जायें और तीसरे खंड को ज्यों का त्यों रखा जाये, तो गुणनफल का मान कुछ अधिक होगा।

अब मान लें कि एक खंड $\frac{a}{3}$ के बराबर ही है। तब अन्य दो का रूप होगा

$$\frac{a}{3}+z \text{ और } \frac{a}{3}-z.$$

यदि हम दो अंतिम खंडों को $\frac{a}{3}$ के बराबर कर दें (इससे उनका योगफल नहीं बदलेगा), तो गुणनफल फिर बढ़ जायेगा और उसका मान होगा :

$$\frac{a}{3} \cdot \frac{a}{3} \cdot \frac{a}{3} = \frac{a^3}{27}.$$

निष्कर्ष : यदि संख्या a को तीन असमान खंडों में तोड़ा जाये, तो इन खंडों का गुणनफल व्यंजन $\frac{a^3}{27}$ से कम होगा, जो योगफल में संख्या a देने वाले तीन, समान गुणकों का गुणनफल है।

यह साध्य इसी विधि से चार, पाँच, छे आदि गुणकों के लिये भी सिद्ध किया जा सकता है।

अब एक अधिक व्यापक स्थिति देखते हैं:

प्रश्न

x और y के किन मानों के लिये व्यंजन $x^p y^q$ का मान अधिकतम होगा, यदि $x+y=a$ है?

हल

ज्ञात करना है कि x के किस मान के लिये व्यंजन

$$x^p(a-x)^q$$

का मान अधिकतम होता है।

इस व्यंजन में संख्या $\frac{1}{p^p q^q}$ से गुणा करते हैं, जिससे एक नया व्यंजन मिलता है

$$\frac{x^p(a-x)^q}{p^p q^q}$$

जो आरंभिक व्यंजन के साथ-साथ खुद भी अधिकतम मान ग्रहण करता है।

अब इस व्यंजन को निम्न रूप में लिखते हैं:

$$\underbrace{\frac{x}{p}\cdot\frac{x}{p}\cdot\frac{x}{p}\cdot\frac{x}{p}}_{p\text{ बार}}\ldots\cdot\underbrace{\frac{a-x}{q}\cdot\frac{a-x}{q}\cdot\frac{a-x}{q}}_{q\text{ बार}}\ldots$$

इन सभी गुणनखंडों का योगफल संख्या a के बराबर है, अर्थात् एक स्थिर राशि है–

$$\underbrace{\frac{x}{p}+\frac{x}{p}+\frac{x}{p}}_{p\text{ बार}}+\ldots.+\underbrace{\frac{a-x}{q}+\frac{a-x}{q}+\frac{a-x}{q}}_{q\text{ बार}}+\ldots=$$

$$=\frac{px}{p}+\frac{q(a-x)}{q}=x+a-x=a.$$

पिछले प्रश्नों में सिद्ध किया जा चुका है कि गुणनफल

$$\frac{x}{p}\cdot\frac{x}{p}\cdot\frac{x}{p}\cdot\ldots.\cdot\frac{a-x}{q}\cdot\frac{a-x}{q}\cdot\frac{a-x}{q}\cdot\ldots$$

अपना उच्चतम मान ग्रहण करता है, जब इसके सभी गुणक आपस में बराबर होते हैं, अर्थात् जब

$$\frac{x}{p}=\frac{a-x}{q}\quad\text{होता है।}$$

चूंकि $a-x=y$ है, इसलिये इस अनुपात के पदों का स्थान बदलने पर:

$$\frac{x}{y}=\frac{p}{q}.$$

निष्कर्ष: योगफल $x+y$ स्थिर होने पर गुणनफल $x^p y^q$ का मान अधिकतम तभी होता है, जब $x:y=p:q$ होता है।

इसी तरह हम यह भी सिद्ध कर सकते हैं कि स्थिर योगफल $x+y+z$, $x+y+z+t$, आदि के लिये गुणनफल–

$$x^p y^q z^r, \quad x^p y^q z^r t^u, \text{ आदि}$$

के मान निम्न स्थिति में अधिकतम होते हैं:
$x:y:z=p:q:r$, $x:y:z:t=p:q:r:u$ आदि।

योगफल कब अल्पतम होता है?

उपयोग बीजगणितीय साध्य प्रमाणित करने में अपनी शक्ति की परीक्षा के इच्छुक पाठक निम्न प्रमेय सिद्ध कर सकते हैं:

1. स्थिर गुणनफल देने वाली दो संख्याओं का योगफल तभी अल्पतम होता है, जब वे बराबर होती हैं।

जैसे, गुणनफल 36 के लिये: $4+9=13$, $3+12=15$, $2+18=20$, $1+36=37$; लेकिन $6+6=12$ सबसे छोटा योगफल है।

2. स्थिर गुणनफल देने वाली कई संख्याओं का योगफल तभी अल्पतम होता है, जब वे बराबर होती हैं।

उदाहरणार्थ, गुणनफल 216 के लिये: $3+12+6=21$, $2+18+6=26$, $9+6+4=19$; लेकिन $6+6+6=18$ सबसे छोटा योगफल है।

नीचे दिये गये उदाहरणों में दिखाया गया है कि इन साध्यों का उपयोग कैसे होता है।

अधिकतम आयतन का टुकड़ा

प्रश्न

बेलनाकार लकड़ी से अधिकतम आयतन का एक आयताकार अनुप्रस्थ काट वाला छड़ बनाना है (चित्र 24)। अनुप्रस्थ काट की मापें कैसी होंगी ?

चित्र 24

हल

यदि आयताकार अनुप्रस्थ काट की भुजाएं x और y हैं, तो पीथागोरस-साध्य के अनुसार

$$x^2+y^2=d^2$$

होगा, जहां d बेलन का व्यास है। छड़ का आयतन तभी अधिकतम होगा, जब उसके अनुप्रस्थ काट का क्षेत्रफल अधिकतम होगा, अर्थात् जब xy का मान अधिकतम होगा। लेकिन यदि xy अधिकतम होगा, तो गुणनफल x^2y^2 भी अधिकतम होगा। चूंकि योगफल x^2+y^2 अपरिवर्तित रहता है, इसलिये, जैसा कि ऊपर सिद्ध किया जा चुका है, गुणनफल x^2y^2 तभी अधिकतम होगा, जब निम्न स्थिति होगी :

$$x^2=y^2 \quad \text{या} \quad x=y.$$

अतः अनुप्रस्थ काट वर्गाकार होना चाहिये।

जमीन के दो टुकड़े

प्रश्न

1. समकोण चतुर्भुज टुकड़े का आकार कैसा हो कि उसके प्रत्त क्षेत्रफल के लिये उसके बाड़े की लंबाई अल्पतम हो?

2. समकोण चतुर्भुज टुकड़े का आकार कैसा हो कि उसके बाड़े की प्रत्त लंबाई के लिये उसका क्षेत्रफल अधिकतम हो?

हल

1. समकोण चतुर्भुज टुकड़े का आकार उसकी भुजाओं x तथा y के अनुपात पर निर्भर करता है। x तथा y भुजाओं वाले टुकड़े का क्षेत्रफल xy के बराबर है और उसकी बाड़ की लंबाई $2x+2y$ है। बाड़ की लंबाई अल्पतम होगी, यदि $x+y$ का मान अल्पतम होगा।

गुणनफल xy स्थिर होने पर योगफल $x+y$ तभी अल्पतम होता है, जब $x=y$ होता है। अतः टुकड़े का इष्ट आकार वर्ग है।

2. यदि समकोण चतुर्भुज की भुजाएं x और y हैं, तो उसकी बाड़ की लंबाई $2x+2y$ है और उसका क्षेत्रफल xy है। यह गुणनफल तभी अधिकतम होगा, जब गुणनफल $4xy$, अर्थात् $2x \cdot 2y$ अधिकतम होगा; अंतिम गुणनफल तभी अधिकतम हो सकता है (उसके गुणकों का योगफल $2x+2y$ स्थिर होने पर), जब $2x=2y$ होता है, अर्थात् जब टुकड़ा वर्गाकार होता है।

अब हम वर्ग के ज्ञात गुणों में एक और गुण जोड़ सकते हैं: क्षेत्रफल प्रत्त होने पर समकोण चतुर्भुजों में सिर्फ वर्ग की परिमिति अल्पतम होती है और परिमिति प्रत्त होने पर सिर्फ वर्ग का क्षेत्रफल अधिकतम होता है।

पतंग

प्रश्न

वृत्तखंड रूपी पतंग की मापें इस प्रकार चुननी हैं कि दी हुई परिमिति के लिये उसका क्षेत्रफल अधिकतम हो। कैसा होगा यह खंड?

हल

प्रश्न को और शुद्ध रूप में व्यक्त किया जाये, तो हमें यह ज्ञात करना है कि वृत्तखंड के चाप की लंबाई और उसकी त्रिज्या के किस अनुपात पर उसका क्षेत्रफल अधिकतम होगा (यदि परिमिति पहले से निश्चित है)।

वृत्तखंड की त्रिज्या x और चाप y से द्योतित करने पर उसकी परिमिति l और क्षेत्रफल S निम्न रूप में व्यक्त होंगे (चित्र 25):

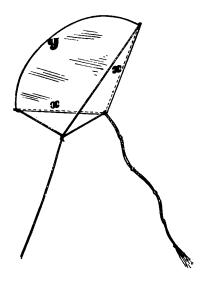
$$l=2x+y,$$
$$S=\frac{xy}{2}=\frac{x(l-2x)}{2}.$$

x के जिस मान पर राशि S अधिकतम होती है, गुणनफल $2x(l-2x)$, अर्थात् चौगुना क्षेत्रफल भी x के उसी मान पर अधिकतम होता है। चूंकि गुणकों का योगफल $2x+(l-2x)=l$

स्थिर राशि है, इसलिये गुणनफल तभी अधिकतम होगा, जब $2x=l-2x$ होगा, जिससे

$$x=\frac{l}{4},$$

$$y=l-2\cdot\frac{l}{4}=\frac{l}{2}$$

इस प्रकार, दी हुई परिमिति के लिये वृत्तखंड का क्षेत्रफल तभी अधिकतम होता है, जब उसकी त्रिज्या उसके चाप की आधी होती है (अर्थात् जब चाप की लंबाई दोनों त्रिज्याओं के योगफल के बराबर

चित्र 25

होती है, या जब परिमिति के वक्र भाग की लंबाई टूटी रेखा की लंबाई के बराबर होती है)। वृत्तखंड का कोण 115° या दो रेडियन है।

पतंग कैसा उड़ेगा – यह एक अलग प्रश्न है, जो हमारे विषय से बाहर है।

घर का जीर्णोद्धार

प्रश्न

ध्वस्त घर की जगह, जहां सिर्फ एक दीवार बची है नया घर बनाना है। बची दीवार की लंबाई 12m है। नये घर का क्षेत्रफल $112m^2$ होना चाहिये। खर्च के दर इस प्रकार हैं:

1) प्रति मीटर दीवार की मरम्मत का मूल्य प्रति मीटर नयी दीवार के मूल्य का 25% है।

2) प्रति मीटर पुरानी दीवार तोड़कर प्राप्त पुरानी सामग्री से नयी दीवार बनाने पर खर्च नयी सामग्री से प्रति मीटर नयी दीवार बनाने के खर्च का 50% है।

इन परिस्थितियों में बची दीवार का किस तरह उपयोग किया जाये कि लाभ अधिकतम हो?

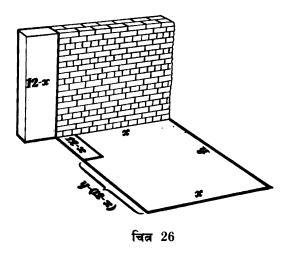
हल

मान लें कि पुरानी दीवार का x मीटर सुरक्षित रखा जाता है; इसकी मरम्मत की जाती है। इसका $12-x$ मीटर तोड़ दिया जाता है, ताकि प्राप्त पुरानी सामग्री का उपयोग घर की नयी दीवार बनाने में किया जाये (चित्र 26)। यदि नयी सामग्री से प्रति मीटर दीवार बनाने का खर्च a है, तो x मीटर की मरम्मत का खर्च $\frac{ax}{4}$ है; $12-x$ मीटर दीवार पुरानी सामग्री से बनाने में खर्च $\frac{a(12-x)}{2}$

होगा ; इस दीवार का बाकी भाग बनाने में $a[y-(12-x)]$, अर्थात् $a(y+x-12)$ खर्च होगा ; तीसरी दीवार बनाने का खर्च ax और चौथी दीवार बनाने का खर्च ay है। कुल खर्च होगा

$$\frac{ax}{4}+\frac{a(12-x)}{2}+a(y+x-12)+ax+ay=$$
$$=\frac{a(7x+8y)}{4}-6a.$$

अंतिम व्यंजन का मान अल्पतम तब होता है, जब योगफल $7x+8y$ का मान अल्पतम होता है।

चित्र 26

हम जानते हैं कि घर का क्षेत्रफल xy का मान 112 है, अतः

$$7x \cdot 8y=56 \cdot 112.$$

यह गुणनफल स्थिर होने के कारण योगफल $7x+8y$ तभी

अल्पतम होगा, जब $7x=8y$ होगा, जिससे

$$y=\frac{7}{8}x.$$

y का यह व्यंजन समीकरण $xy=112$ में रखने पर

$$\frac{7}{8}x^2=112, \ x=\sqrt{128}\approx 11.3.$$

चूंकि बची दीवार की लंबाई $12m$ है, तो इसमें से $0.7m$ तोड़कर नयी दीवार में लगाना होगा।

फुलवारी

प्रश्न

फुलवारी एक तरफ पुरानी बाड़ से घिरी है, बाकी तीन तरफ से भी उसे घेरना है, पर सामग्री इतनी ही है कि सिर्फ l मीटर बाड़ तैयार हो सकती है। कैसे बाड़ बनायी जाये कि फुलवारी का क्षेत्रफल अधिकतम हो?

हल

मान लें कि बाड़ के सहारे फुलवारी की इष्ट लंबाई x है और चौड़ाई y है (चित्र 27)। तब इसे घेरने के लिये $x+2y$ मीटर लंबी बाड़ चाहिये और

$$x+2y=l$$

होना चाहिये।

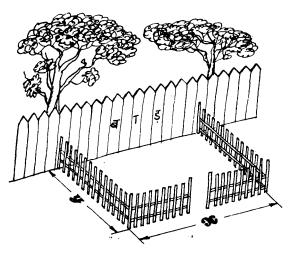
फुलवारी का क्षेत्रफल है:

$$S = xy = y(l - 2y).$$

इसका मान जब महत्तम होता है, तब निम्न राशि का मान भी महत्तम होता है :

$$2y(l - 2y).$$

यह (दुगुना क्षेत्रफल) दो राशियों का गुणनफल है, जिनका योगफल l स्थिर है, अतः यह गुणनफल तभी अधिकतम होगा, जब निम्न स्थिति होगी :

$$2y = l - 2y,$$

चित्र 27

जिससे $y = \frac{l}{4}$, $x = l - 2y = \frac{l}{2}$.

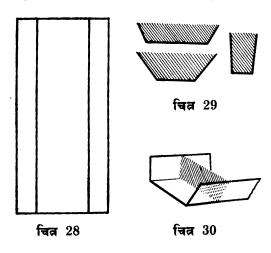
अन्य शब्दों में, $x = 2y$, अर्थात् लंबाई को चौड़ाई से दुगुनी होनी चाहिये।

नाली का अधिकतम अनुप्रस्थ काट

प्रश्न

धातु के आयताकार चदरे (चित्र 28) को मोड़कर नाली बनानी है, जिसके अनुप्रस्थ काट की आकृति समलंब चतुर्भुज हो। यह कई

चित्र 29

चित्र 28

चित्र 30

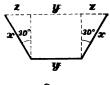
तरह से किया जा सकता है (दे० चित्र 29)। बगल की पट्टियां कितनी चौड़ी ली जायें और उन्हें किस कोण पर मोड़ा जाये कि नाली के अनुप्रस्थ काट का क्षेत्रफल अधिकतम हो (चित्र 30)?

हल

मान लें कि चदरे की चौड़ाई l है। मोड़ी जाने वाली बगल की पट्टियों की चौड़ाई x और नाली के तल की चौड़ाई y मान लेते हैं।

एक और अज्ञात राशि z लेते हैं, जिसका अर्थ चित्र 31 से स्पष्ट हो जाता है।

नाली के समलंब चतुर्भुज रूपी अनुप्रस्थ काट का क्षेत्रफल होगा

$$S=\frac{(z+y+z)+y}{2}\sqrt{x^2-z^2}=\sqrt{(y+z)^2(x^2-z^2)}.$$

चित्र 31

प्रश्न यह है कि x, y, z के ऐसे मान ज्ञात किये जायें कि S का मान अधिकतम मिले; इसमें योगफल $2x+y$ (अर्थात् चदरे की चौड़ाई l) स्थिर है। रूपांतरण के बाद

$$S^2=(y+z)^2(x+z)(x-z).$$

S^2 का मान x, y, z के उन्हीं मानों से अधिकतम होता है, जिनसे $3S^2$ का, जिसे निम्न गुणन के रूप में लिख सकते हैं:

$$(y+z)(y+z)(x+z)(3x-3z).$$

इन चार गुणकों का योगफल स्थिर है:

$$y+z+y+z+x+z+3x-3z=2y+4x=2l.$$

अतः चारों गुणकों का गुणनफल तभी अधिकतम होगा, जब ये आपस

में बराबर होंगे, अर्थात् जब

$$y+z=x+z \quad \text{और} \quad x+z=3x-3z$$

होगा। प्रथम समीकरण से:

$$y=x,$$

और चूँकि $y+2x=l$, इसलिये $x=y=\frac{l}{3}$.

दूसरे समीकरण से:

$$z=\frac{x}{2}=\frac{l}{6}\,.$$

अब चूँकि संलंब z कर्ण x का आधा है (चित्र 31), इसलिये इस संलंब के सामने का कोण 30° के बराबर है और नाली की पार्श्व दीवारें पेंदी के साथ 90° + 30° = 120° का कोण बनाती हैं।

इस प्रकार, नाली का अनुप्रस्थ काट तब अधिकतम होगा, जब उसकी किनारियां नियमित षटकोण की तीन संलग्न भुजाओं की तरह मुड़ी होंगी।

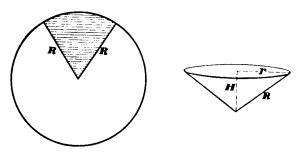
अधिकतम आयतन का शंकु

प्रश्न

गोल पत्तर से शंकु बनाना है। इसके लिये पत्तर में से एक वृत्तखंड काट कर अलग करते हैं और बाकी हिस्से को मोड़कर शंकु बनाते हैं (चित्र 32)। काटे हुए वृत्तखंड का कोण कितना हो कि अधिक-तम आयतन का शंकु मिले?

हल

पत्तर के जिस भाग को मोड़कर शंकु बनाते हैं, उसके चाप की लंबाई x (मीटर) मान लेते हैं। अतः शंकु के पार्श्व की लंबाई गोल पत्तर की त्रिज्या R के बराबर होगी और शंकु के मुँह की परिधि x होगी। शंकु के मुँह की त्रिज्या निम्न संबंध से ज्ञात करते हैं :

$$2\pi r = x, \quad \text{जिससे} \quad r = \frac{x}{2\pi}.$$

चित्र 32

शंकु की ऊँचाई (पीथागोरस के साध्य से)

$$H = \sqrt{R^2 - r^2} = \sqrt{R^2 - \frac{x^2}{4\pi^2}}$$

(चित्र 32) । इस शंकु का आयतन होगा

$$V = \frac{\pi}{3} r^2 H = \frac{\pi}{3} \left(\frac{x}{2\pi}\right)^2 \sqrt{R^2 - \frac{x^2}{4\pi^2}}.$$

जब इस व्यंजन का मान अधिकतम होता है, तो निम्न व्यंजन का मान भी अधिकतम होता है :

$$\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2\sqrt{R^2-\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2}$$

साथ ही इसके वर्ग

$$\left(\frac{x}{2\pi}\right)^4\left[R^2-\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2\right]$$

का मान भी अधिकतम होता है। चूंकि

$$\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2+R^2-\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2=R^2$$

एक स्थिर राशि है, इसलिये (पृ० 211-215 पर सिद्ध किये गये प्रमेयों के अनुसार) अंतिम गुणनफल x के ऐसे मान पर अधिकतम होगा, जिससे निम्न अनुपात मिलता है :

$$\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2:\left[R^2-\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2\right]=2:1,$$

जिससे

$$\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2=2R^2-2\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2,$$

$$3\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2=2R^2 \text{ तथा } x=\frac{2\pi}{3}R\sqrt{6}\approx 5.15R.$$

चाप की डिग्रियों में $x\approx 295^\circ$ होगा, अतः काट कर अलग किये गये वृत्तखंड का कोण लगभग 65° होगा।

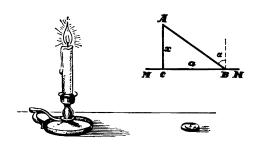
अधिकतम प्रकाश

प्रश्न

मोमबत्ती की लौ टेबुल से किस ऊँचाई पर हो कि टेबुल पर रखे सिक्के पर अधिकतस प्रकाश पड़े?

हल

आपको लग सकता है कि अधिकतम प्रकाश पाने के लिये लौ को यथासंभव नीचे रखना चाहिये, पर यह गलत है, क्योंकि लौ के नीचे होने से टेबुल पर किरणें बहुत तिरछी गिरेंगी। किरणें टेबुल पर यथासंभव खड़ी गिरें, इसके लिये मोमबत्ती को टेबुल से बहुत दूर करना होगा (इस स्थिति में भी टेबुल पर पड़ने वाला प्रकाश क्षीण हो

चित्र 33

जायेगा)। अतः स्पष्ट है कि अधिकतम प्रकाश पाने के लिये लौ को किसी बीच की ऊँचाई पर रखना होगा। इसे हम x से द्योतित करते हैं (चित्र 33)। सिक्के B से लंब AC के आधार C की दूरी BC को a से द्योतित करते हैं (बिन्दु A लौ है)। यदि लौ की चमक i है, तो प्रकाशिकी के नियमों के अनुसार सिक्के की प्रकाशिता होगी :

$$\frac{i}{\overline{AB}^2}\cos\alpha = \frac{i\cos\alpha}{(\sqrt{a^2+x^2})^2} = \frac{i\cos\alpha}{a^2+x^2}\ .$$

जहां α किरण AB का आपतन-कोण है। चूंकि

$$\cos\alpha = \cos A = \frac{x}{AB} = \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}},$$

तो प्रकाशिता होगी

$$\frac{i}{a^2+x^2} \cdot \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}} = \frac{ix}{(a^2+x^2)^{3/2}}.$$

x के जिस मान के लिये यह व्यंजन अधिकतम होता है, उसी मान के लिये इसका वर्ग भी अधिकतम होता है। इसका वर्ग है:

$$\frac{i^2x^2}{(a^2+x^2)^3}.$$

गुणक i^2 एक स्थिर राशि है, अतः इसे छोड़ देते हैं और विचाराधीन व्यंजन के बाकी भाग का निम्न रूपांतरण करते हैं:

$$\frac{x^2}{(a^2+x^2)^3} = \frac{1}{(x^2+a^2)^2}\left(1 - \frac{a^2}{x^2+a^2}\right) = \left(\frac{1}{x^2+a^2}\right)^2\left(1 - \frac{a^2}{x^2+a^2}\right).$$

यह व्यंजन जब अपना अधिकतम मान ग्रहण करता है, तो साथ ही निम्न व्यंजन भी अपना अधिकतम मान ग्रहण करता है:

$$\left(\frac{a^2}{x^2+a^2}\right)^2\left(1 - \frac{a^2}{x^2+a^2}\right);$$

इसका कारण यह है कि स्थिर गुणक a^4 को लाने से x के उस मान पर कोई फर्क नहीं पड़ता, जिससे व्यंजन अपना अधिकतम मान प्राप्त करता है। यह ध्यान देते हुए कि इन गुणकों के प्रथम घातों का योगफल

$$\frac{a^2}{x^2+a^2} + \left(1 - \frac{a^2}{x^2+a^2}\right) = 1$$

स्थिरांक है, हम निष्कर्ष निकालते हैं कि विचाराधीन गुणनफल तभी अधिकतम होगा, जब निम्न शर्त्त पूरी होगी:

$$\frac{a^2}{x^2+a^2} : \left(1 - \frac{a^2}{x^2+a^2} \right) = 2 : 1$$ (दे० पृ० 211-215)

इससे समीकरण मिलता है :

$$a^2 = 2x^2 + 2a^2 - 2a^2.$$

हल करने पर

$$x = \frac{a}{\sqrt{2}} \approx 0.71\, a.$$

सिक्के पर अधिकतम प्रकाश तब पड़ता है, जब सिक्के से प्रकाश-स्रोत के प्रक्षेप की दूरी की 0.71 के बराबर ऊँचाई पर प्रकाश-स्रोत रखा जाता है। इस बात का ज्ञान होने पर काम करने की जगह को श्रेष्ठ रूप से प्रकाशित किया जा सकता है।

अध्याय 8

श्रेढ़ी

प्राचीनतम श्रेढ़ी

प्रश्न

श्रेढ़ी का प्राचीनतम प्रश्न शतरंज के आविष्कारक के इनाम से संबंधित प्रश्न नहीं है, जो सिर्फ दो हजार वर्ष पुराना है। श्रेढ़ी का प्राचीनतम प्रश्न मिश्र के एक पपीरस पर अंकित है, जिसकी खोज रिंडा ने की थी। प्रश्न 2000 वर्ष ईसा पूर्व अंकित किया गया था, लेकिन पता चला कि यह एक और भी प्राचीन – करीब तीन हजार वर्ष ईसा पूर्व की – गणितीय रचना से लिया गया था। पपीरस पर जो अंकगणितीय, बीजगणितीय तथा ज्यामितिक प्रश्न अंकित हैं, उनमें से एक यहां प्रस्तुत है (स्वतंत्र अनुवाद में):

पाँच लोगों के बीच सौ मन गेहूँ इस प्रकार बांटा जाता है कि दूसरे को पहले से इतना अधिक मिलता है, जितना तीसरे को दूसरे से, चौथे को तीसरे और पाँचवें को चौथे से अधिक मिलता है। इसके अलावा, प्रथम दो आदमी को अंतिम तीन आदमी से 7 गुना कम मिलता है। किसे कितना गेहूँ मिलता है?

हल

स्पष्ट है कि पाँचों व्यक्तियों के हिस्से एक वर्धमान अंकगणितीय श्रेढ़ी बनाते हैं। मान लें कि इसका प्रथम पद x है और अंतर y है। तब बँटवारा निम्न विधि से होता है:

पहले व्यक्ति का हिस्सा . .	x
दूसरे « « «	$x+y$
तीसरे « « « .	$x+2y$
चौथे « « « .	$x+3y$
पाँचवें « « «	$x+4y$

प्रश्न की शर्त्तों के अनुसार निम्न समीकरण बनते हैं:

$$\begin{cases} x+(x+y)+(x+2y)+(x+3y)+(x+4y)=100, \\ 7[x+(x+y)]=(x+2y)+(x+3y)+(x+4y) \end{cases}$$

इन्हें अलग-अलग सरल करने पर निम्न समीकरण-तंत्र मिलता है:

$$\begin{cases} x+2y=20, \\ 11x=2y, \end{cases}$$

जिसे हल करने पर

$$x=1\frac{2}{3}, \; y=9\frac{1}{6}.$$

इसका मतलब है कि 100 मन गेहूँ को निम्न हिस्सों में बाँटा गया था:

$$1\frac{2}{3}, \;\; 10\frac{5}{6}, \; 20, \; 29\frac{1}{6}, \;\; 38\frac{1}{3}.$$

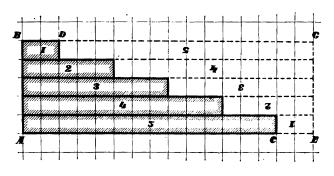
खानेदार कागज पर बीजगणित

श्रेढ़ी का पहला प्रश्न कोई पाँच हजार वर्ष पूर्व रचा गया था, फिर भी स्कूलों में श्रेढ़ी की पढ़ाई अपेक्षाकृत हाल में शुरू हुई है। दो सौ वर्ष पूर्व प्रकाशित माग्नीत्स्की की पाठ्य-पुस्तक करीब आधी शती तक श्रेढ़ी के पठन-पाठन में काम आती रही, पर पुस्तक में श्रेढ़ीगत राशियों को संबंधित करने वाले सामान्य सूत्र नहीं दिये गये

थे। इसीलिये ऐसे प्रश्न खुद लेखक महोदय भी सरलता से हल नहीं कर पाते थे।

अंकगणितीय श्रेढ़ी के पदों का योगफल ज्ञात करने का सूत्र खानेदार कागज की सहायता से सरलतापूर्वक ज्ञात किया जा सकता है। ऐसे कागज पर कोई भी अंकगणितीय श्रेढ़ी सीढ़ियों के रूप में अंकित की जा सकती है। उदाहरणार्थ, चित्र 34 में आकृति $ABCD$ निम्न श्रेढ़ी दर्शाता है:

$$2, 5, 8, 11, 14.$$

इसके पदों को जोड़ने के लिये इस आकृति को बढ़ाकर आयत $ABGE$ बना लेते हैं, जिसमें दो समान आकृतियां $ABDC$ और $DGEC$ हैं। दोनों में से किसी का भी क्षेत्रफल हमारी श्रेढ़ी के पदों के योगफल

चित्र 34

के बराबर है। आयत का क्षेत्रफल श्रेढ़ी के योगफल का दुगुना है। लेकिन आयत का क्षेत्रफल है:

$$(AC+CE)\cdot AB.$$

इसमें $AC + CE$ और कुछ नहीं, श्रेढ़ी के प्रथम और पाँचवें (अंतिम) पदों का योगफल है; AB – श्रेढ़ी के पदों की संख्या है। अतः दुगुना योगफल

$$2S = (\text{अंत्य पदों का योग}) \cdot (\text{पदों की संख्या})$$

या

$$S = \frac{(\text{प्रथम पद} + \text{अंतिम पद}) \cdot (\text{पदों की संख्या})}{2} .$$

सिंचाई

प्रश्न

खेत तीस टुकड़ों में बंटा है; प्रत्येक की लंबाई 16m और चौड़ाई 2.5m है। कुआं खेत के एक कोने से 14m दूर है। किसान हर टुकड़े को चारों तरफ से पटाता है। एक बार में कुएं से वह जितना पानी लाता है, वह एक टुकड़े की सिंचाई के लिये काफी होता है। पूरे खेत की सिंचाई के लिये उसे कितना चलना पड़ेगा? पथ कुएं से शुरू मानें।

हल

पहला टुकड़ा सींचने के लिये किसान को इतनी लंबी दूरी तय करनी पड़ेगी –

$$14+16+2.5+16+2.5+14=65\text{m}.$$

दूसरे टुकड़े की सिंचाई के लिये –

$$14+2.5+16+2.5+16+2.5+2.5+14=65+5=70\text{m}$$

हर अगले टुकड़े की सिंचाई के लिये पिछले से 5m अधिक चलना पड़ेगा। अतः श्रेढ़ी मिलती है:

$$65,\ 70,\ 75, \ldots 65+5\cdot 29.$$

इसके पदों का योगफल होगा

$$\frac{(65+65+29\cdot 5)30}{2}=4125\text{m}.$$

सभी टुकड़ों की सिंचाई करने में किसान को कुल 4.125 km चलना पड़ेगा।

मुर्गियों का चारा

प्रश्न

सप्ताह में एक मुर्गी के लिये एक डेकालीटर चारा के हिसाब से 31 मुर्गियों के लिये चारा की एक मात्रा खरीदी गयी। यह आशा की गयी थी कि मुर्गियों की संख्या बदलेगी नहीं। पर वास्तविकता में हर सप्ताह एक मुर्गी कम हो जाती थी, इसलिये चारा जितने समय के लिये खरीदा गया था उससे दुगुने समय तक काम आया।

कितना चारा खरीदा गया था और कितने समय के लिये खरीदा गया था?

हल

मान लें कि x डेकालीटर चारा y सप्ताह के लिये खरीदा गया था। चूंकि चारा एक डेकालीटर प्रति मुर्गी प्रति सप्ताह के हिसाब से 31 मुर्गियों के लिये खरीदा गया था, इसलिये

$$x=31y$$

चारा खर्च होने का वास्तविक क्रम निम्न प्रकार से है:

1-ला सप्ताह 31

2-रा « . . . . . . 31 — 1

3-रा « . . . . 31 — 2

. . . .

$2y$ वां « . . . . $31-(2y-1)=31-2y+1$

क्योंकि चारा दुगुने समय ($2y$ सप्ताह) तक काम आया था। अतः चारे की कुल मात्रा होगी

$$x=31y=31+30+29+\ldots+(31-2y+1).$$

यह ऐसी श्रेढ़ी का योगफल है, जिसमें पदों की कुल संख्या $2y$ है, पहला पद 31 के बराबर है, अंतिम पद $31-2y+1$ के बराबर है; अतः

$$31y=\frac{(31+31-2y+1)2y}{2}=(63-2y)y.$$

चूंकि y का मान शून्य असंभव है, इसलिये इस समिका के दोनों पक्षों में से हम गुणक y काट दे सकते हैं। तब मिलेगा

$$31=63-2y \quad \text{और} \quad y=16,$$

जिससे

$$x=31y=496.$$

496 डेकालीटर चारा 16 सप्ताह के लिये खरीदा गया था।

बेलदारों का टोली

प्रश्न

दसवीं कक्षा के छात्रों ने स्कूल की फुलवारी पटाने के लिये एक नाला खोदने का निश्चय किया; इसके लिये उन्होंने बेलदारों की एक टोली संगठित की। यदि सारी टोली एक साथ काम करती, तो काम 24 घंटे में खत्म हो जाता। पर वास्तविकता में टोली के सिर्फ एक सदस्य ने काम शुरू किया। कुछ समय बाद दूसरा सदस्य आया; उतना ही समय और बीतने पर तीसरा आया; फिर उसी अंतराल बाद चौथा आया; इसी तरह अंतिम सदस्य तक सभी एक निश्चित अंतराल पर आते गये। हिसाब लगाने पर पता चला कि जो सबसे पहले आया, उसे अंतिम वाले की तुलना में 11 गुना अधिक समय तक काम करना पड़ा।

सबसे अंत में आने वाले सदस्य ने कितना समय काम किया?

हल

मान लें कि अंतिम सदस्य ने x घंटे काम किये, तब प्रथम सदस्य ने $11x$ घंटे काम किये। यदि टोली में कुल y छात्र थे, तो काम के कुल घंटे (सभी का समय मिलाकर) y पदों वाली ह्रासमान श्रेढ़ी के योगफल के बराबर होंगे, जिसका पहला पद $11x$ है और अंतिम पद x है, अर्थात् काम के कुल घंटे हुए

$$\frac{(11x+x)y}{2}=6xy.$$

दूसरी ओर, यह ज्ञात है कि यदि y छात्रों की कुल टोली एक साथ काम करती, तो नाला 24 घंटों में, या – सभी सदस्यों का समय मिलाकर – कुल $24\,y$ घंटों में खुद जाता।

अतः

$$6xy=24y.$$

संख्या y शून्य के बराबर नहीं हो सकती, अतः समीकरण के दोनों पक्षों में इससे भाग दिया जा सकता है, जिससे

$$6x=24$$

और

$$x=4.$$

इस प्रकार, अंत में हाथ बंटाने वाले सदस्य ने 4 घंटे काम किये।

प्रश्न का उत्तर हमने प्राप्त कर लिया है, पर यदि हम यह जानना चाहें कि टोली में कितने छात्र थे, तो हम यह निर्धारित नहीं कर सकेंगे, यद्यपि यह संख्या समीकरण में थी (वर्ण y के रूप में)। इस प्रश्न का उत्तर ज्ञात करने के लिये पर्याप्त आंकड़े नहीं दिये गये हैं।

सेब

प्रश्न

माली ने आधे सेब और एक अर्ध-सेब एक ग्राहक को बेच दिया; बचे सेबों का आधा और एक अर्ध-सेब – दूसरे ग्राहक को; आदि। सातवें ग्राहक को बचे सेबों का आधा और एक अर्ध-सेब बेचने के बाद उसके पास सेब नहीं बचे। कितने सेब थे माली के पास?

हल

यदि शुरू में सेबों की संख्या x थी, तो पहले ग्राहक को मिला

$$\frac{x}{2}+\frac{1}{2}=\frac{x+1}{2},$$

दूसरे को

$$\frac{1}{2}\left(x-\frac{x+1}{2}\right)+\frac{1}{2}=\frac{x+1}{2^2},$$

तीसरे को

$$\frac{1}{2}\left(x-\frac{x+1}{2}-\frac{x+1}{4}\right)+\frac{1}{2}=\frac{x+1}{2^3},$$

सातवें को

$$\frac{x+1}{2^7}.$$

समीकरण मिलता है

$$\frac{x+1}{2}+\frac{x+1}{2^2}+\frac{x+1}{2^3}+\ldots+\frac{x+1}{2^7}=x$$

या

$$(x+1)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^7}\right)=x$$

कोष्ठक में स्थित ज्यामितिक (गुणोत्तर) श्रेढ़ी के पदों का योगफल कलन करके निर्धारित करते हैं कि

$$\frac{x}{x+1}=1-\frac{1}{2^7}$$

और

$$x=2^7-1=127.$$

आरंभ में सेबों की संख्या 127 थी।

घोड़े की खरीद

माग्नीत्स्की के पुराने अंकगणित में एक मजेदार प्रश्न था, जिसे मूल भाषा में कुछ परिवर्तन के साथ यहां प्रस्तुत कर रहा हूँ:

एक आदमी 156 रूबल में एक घोड़ा बेच रहा था, लेकिन ग्राहक को सौदा महंगा लग रहा था। बेचने वाले ने सौदे की दूसरी शर्त्त सुनायी :

"यदि तुम्हें यह महंगा लग रहा है, तो घोड़े के नाल में लगी कीलें खरीद लो – घोड़ा फाव में दे दूंगा। चार नाल हैं; हर नाल में 6 कीलें हैं। प्रथम कील का दाम $\frac{1}{4}$ कोपेक है, दूसरे का $\frac{1}{2}$ कोपेक, तीसरे का 1 कोपेक आदि।"

ग्राहक ने सोचा कि कीलों के लिये 10 रूबल से अधिक शायद ही देने पड़ेंगे, इसीलिये मुफ्त में घोड़ा पाने के लिये वह तैयार हो गया।

कितने रूबल देने पड़े उसे?

चित्र 35

हल

24 कीलों के लिये उसे देने पड़े

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+1+2+2^2+2^3+\ldots+2^{24-3} \text{ कोपेक।}$$

योगफल है

$$\frac{2^{21}\cdot 2-\frac{1}{4}}{2-1}=2^{22}-\frac{1}{4}=4194303\frac{3}{4} \text{ कोपेक,}$$

अर्थात् लगभग 42 हजार रूबल। घोड़ा बिना किसी नुकसान के मुफ्त में दिया जा सकता था, इसमें कोई शक नहीं है।

योद्धा का पुरस्कार

प्रश्न

रूसी में अंकगणित की एक अन्य पुरानी पाठ्य-पुस्तक का नाम था:

"तोपखाना के संगीन-अधिकारी और गणित के असैनिक शिक्षक येफीम वोइत्साखोव्स्की रचित शुद्ध गणित का पूर्ण पाठक्रम – गणित का अभ्यास करने वाले किशोरों के लिये" (1795)। इसमें से एक प्रश्न प्रस्तुत करता हूँ:

"योद्धा को पहले जख्म के लिये 1 कोपेक दिया जाता है, दूसरे के लिये 2 कोपेक, तीसरे के लिये 4 कोपेक आदि। युद्ध के अंत में एक योद्धा को 655 रूबल 35 कोपेक मिले। कितनी बार वह घायल हुआ था?"

हल

समीकरण बनाते हैं :

$$65\,535 = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{x-1}$$

या

$$65\,535 = \frac{2^{x-1} \cdot 2 - 1}{2 - 1} = 2^x - 1$$

जिससे

$$65\,536 = 2^x \quad \text{ग्रौर} \quad x = 16$$

उत्तर की जाँच ग्रासानी से की जा सकती है।

पुरस्कार की उदारता के भी क्या कहने हैं–योद्धा 16 जख्म पाकर जिंदा बचता, तब जीकर उसे 655 रूबल 35 कोपेक मिलते।

अध्याय 9

गणित की सातवीं संक्रिया

सातवीं संक्रिया

हम पहले याद दिला चुके हैं कि पाँचवीं संक्रिया – घातन (किसी संख्या का कोई घात निकालने की क्रिया) – की दो प्रतीप संक्रियाएं हैं। यदि

$$a^b = c,$$

तो a को ढूंढ़ना (मूलन, मूल निकालना) पहली प्रतीप संक्रिया है और b ज्ञात करना (लगरथन, लगरथ निकालना) दूसरी प्रतीप संक्रिया है। आशा है कि पाठकों को लगरथों का उतना ज्ञान अवश्य होगा, जितना स्कूलों में पढ़ाया जाता है। शायद उन्हें यह समझने में कठिनाई नहीं होगी कि निम्न व्यंजन का क्या मान होगा :

$$a^{\log_a b}$$

यदि लगरथ के आधार a का संख्या b के लगरथ के बराबर वाला घात निकाला जाये तो संख्या b ही मिलेगी (अतः उपरोक्त व्यंजन b के बराबर है)।

लगरथ की अभिकल्पना किसलिये की गयी थी? इसीलिये कि कलन का काम जल्द और आसान हो जाये। प्रथम लगरथी सारणी के आविष्कारक ने स्वयं लिखा था :

"मैंने अपने ज्ञान और अपनी योग्यता के अनुसार कलन की

कठिनाइयों को यथासंभव दूर करने का प्रयत्न किया है, जिसकी नीरसता गणित सीखने के प्रति वितृष्णा उत्पन्न करती है।"

लगरथ कलन को सचमुच आसान बना देते हैं और इनसे काम भी तेजी से होता है। इसके अतिरिक्त, लगरथ ऐसी संक्रियाओं को भी संभव बना देते हैं, जिन्हें इनके बिना पूरा करना बहुत ही कठिन होता है (जैसे संख्या का मनचाहा मूल निकालना)।

लैप्लेस ने निराधार ही नहीं लिखा था कि "लगरथों की खोज से महीनों के कलन-कार्य को चंद दिनों में संपन्न किया जा सकता है; इससे ज्योतिर्विदों की आयु एक तरह से दुगुनी हो जाती है"। महान गणितज्ञ ने ज्योतिर्विदों के बारे में लिखा है, क्योंकि इन लोगों को विशेष रूप से जटिल और नीरस कलन संपन्न करने पड़ते हैं। लेकिन लैप्लेस की बात किसी भी आदमी पर लागू हो सकती है, जिसका अक्सर क्लिष्ट कलनों से वास्ता पड़ता रहता है।

हम लगरथ के उपयोग और कलनों को सरल करने की उसकी क्षमता के इतने आदी हो गये हैं कि हम उस समय के लोगों की खुशी का अंदाज नहीं लगा सकते, जिनके जीवन-काल में इसका आविष्कार हुआ था। नेपिर के समकालीन हेनरी ब्रिग्स ने, जो दशभू लगरथों की सारणी रचने के लिये विख्यात हैं, नेपिर की कृति देखकर लिखा: 'नेपिर ने अपने नये लगरथों से मुझे हाथ और दिमाग दोनों से तेजी के साथ काम करने को विवश कर दिया। मैं उनसे गर्मियों में मिलने की उम्मीद करता हूँ, क्योंकि और किसी भी पुस्तक ने मुझे इतना प्रभावित नहीं किया था"। ब्रिग्स ने अपनी आकांक्षा पूरी कर ली; वे लगरथों के आविष्कारक से मिलने के लिये स्काटलैंड आये। मिलने पर ब्रिग्स ने कहा:

"मैंने इतनी लंबी यात्रा की है सिर्फ यह जानने के लिये कि किस कला और बुद्धि से आपने ज्योतिर्विदों के लिये लगरथों के बारे में

इतनी अच्छी पुस्तक रची है। और अब यह जान लेने के बाद कि यह कितना सरल है, मुझे आश्चर्य हो रहा है कि पहले किसी ने इसकी खोज क्यों नहीं की।"

लगरथों के प्रतियोगी

कलन-क्रिया तेज करने की आवश्यकता ने लगरथों की खोज के पहले दूसरी तरह की सारणियों को जन्म दिया था, जिनकी सहायता से गुणा की क्रिया के बदले जोड़ने का नहीं, घटाने का काम करते थे। इन सारणियों का सैद्धांतिक आधार निम्न तादात्म्य था :

$$ab = \frac{(a+b)^2}{4} - \frac{(a-b)^2}{4},$$

जिसकी सत्यता कोष्ठक खोलकर सरलतापूर्वक जाँची जा सकती है।

वर्गों का चतुर्थांश ज्ञात होने पर दो संख्याओं का गुणनफल उनके गुणन से नहीं, बल्कि उनके योग और अंतर के वर्ग-चतुर्थांशों के अंतर से ज्ञात हो सकता है। इन्हीं सारणियों की सहायता से वर्ग और वर्गमूल निकाला जा सकता है; सारणी में प्रतीप संख्याओं (जैसे इकाई के अंशों) को शामिल कर लेने पर भाग की संक्रिया भी सरलतापूर्वक संपन्न की जा सकती है। लगरथी-सारणियों की तुलना में इनका लाभ यह है कि इनसे सन्निकट मान नहीं, बल्कि शुद्ध मान प्राप्त होते हैं। पर कई अन्य व्यावहारिक तथा महत्त्वपूर्ण बातों में लगरथी-सारणियां अधिक लाभदायक हैं। वर्ग-चतुर्थांशों की सारणी से एक बार में सिर्फ दो संख्याओं का गुणनफल ज्ञात हो सकता है, पर लगरथी-सारणी से एक साथ कई गुणकों का गुणनफल ज्ञात किया जा सकता है; इनसे संख्या के पूर्णांक या भिन्नांक में कोई भी घात या कोई भी मूल निकाला

जा सकता है। लेकिन वर्ग-चतुर्थांशों की सहायता से (उदाहरण के लिये) मिश्र व्याज भी नहीं निकाले जा सकते।

लेकिन तरह-तरह की लगरथी-सारणियों के निकल चुकने के बाद भी वर्ग-चतुर्थांशों की सारणियां प्रकाशित होती रही हैं। 1856 में एक सारणी फ्रांस में प्रकाशित हुई, जिसका नाम था:

"1 से 1 करोड़ तक की संख्याओं के वर्गों की सारणी, जिसकी सहायता से संख्याओं का शुद्ध गुणनफल अधिक सरल विधि से ज्ञात किया जा सकता है, बनिस्बत कि लगरथों की सहायता से। रचनाकार – अलेक्सांद्र कोसार।"

इस तरह का विचार बहुतों के मन में उठा करता है, पर उन्हें संदेह भी नहीं होता कि इसका कार्यान्वियन बहुत पहले हो चुका है। ऐसी सारणी के दो आविष्कारक मुझे भी मिले थे; उन्हें बहुत ही आश्चर्य हुआ जब पता चला कि ये सारणियां तीन सौ वर्ष पहले आविष्कृत हो चुकी थीं।

लगरथों का एक नया प्रतियोगी है – कलन-सारणियां, जो अक्सर तकनीकी निदर्शिकाओं में दी जाती हैं। इन सारणियों में 2 से 1 000 तक की संख्याओं के वर्ग, घन, वर्गमूल, उनकी प्रतीप संख्याएं, त्रिज्याओं वाले वृत्तों की परिधियां और उनके क्षेत्रफल संकलित रहते हैं। ये सारणियां कई तकनीकी कलनों के लिये सुविधाजनक हैं, पर ये पर्याप्त नहीं होतीं; लगरथी सारणियों का कहीं अधिक विस्तृत उपयोग है।

लगरथी सारणियों का विकास

हाल तक हमारे विद्यालयों में 5-अंकी लगरथी सारणियों का उपयोग होता था। अब 4-अंकी सारणियों का उपयोग होने लगा है,

क्योंकि तकनीकी कलनों के लिये यह पर्याप्त है। पर अधिकांश व्यावहारिक कार्यों में 3-अंकी पासंग (मैंटीसा; लगरथ के मान में भिन्नांक वाला हिस्सा) का उपयोग अधिक सफलता से होता है, क्योंकि दैनंदिन जीवन में कोई भी माप तीन अंकों से अधिक शायद ही कभी होती है।

अधिक छोटे पासंग ही पर्याप्त होंगे,—यह विचार हाल ही में उत्पन्न हुआ है। मुझे वे दिन भी याद हैं, जब स्कूलों में 7-अंकी लगरथों का भारी-भरकम पोथा प्रयुक्त होता था। लेकिन इनका प्रकाशन (1794 में) बिल्कुल नया था। प्रथम दशभू लगरथ में, जिन्हें लंदन के गणितज्ञ हेनरी ब्रिग्स ने कलित किया था (1624 में), 14-अंक थे। कुछ वर्षों बाद इनकी जगह हालैंड के गणितज्ञ अंद्रियान व्लाक्क की 10-अंकी लगरथों की सारणी ने ले ली थी।

जैसा कि हम देखते हैं, दैनंदिन जीवन में प्रयुक्त लगरथी-सारणियों का विकास पासंगों को छोटा करने की दिशा में हुआ है। यह प्रक्रिया अभी भी समाप्त नहीं हुई है क्योंकि बहुत-से लोग अब भी यह नहीं समझ पाते कि कलन की शुद्धता नाप की शुद्धता से अधिक नहीं हो सकती।

पासंग छोटा होने से दो स्पष्ट लाभ हैं: 1) सारणी का आकार छोटा हो जाता है तथा 2) इसका उपयोग सरल हो जाता है और इसीलिये कलन की गति बढ़ जाती है। संख्याओं के सात-अंकी लगरथ बड़े आकार के 200 पृष्ठों पर अँटते हैं, पाँच-अंकी—दो गुना कम आकार के 30 पृष्ठों पर, चार-अंकी लगरथ इससे दस गुनी कम जगह लेते हैं—बड़े आकार के दो पृष्ठों पर अँट जाते हैं, तीन-अंकी लगरथ एक ही पृष्ठ पर अँट सकते हैं।

जहां तक कलन की गति का प्रश्न है, 5-अंकी लगरथों के उपयोग में तिगुना कम समय लगता है, बनिस्बत कि 7-अंकी लगरथों के उपयोग में।

लगरथी अजूबे

दैनंदिन जीवन और आम तकनीकी कार्यों में तीन या चार अंकों वाली सारणियों से काम चल जाता है, लेकिन सैद्धांतिक अन्वीक्षकों के लिये ब्रिग्स के 14-अंकी लगरथों से भी अधिक अंकों वाले लगरथों की सारणियां रची गयी हैं। सामान्यतः लगरथ अव्यतिमानी (या अपरिमेय) संख्याएं हैं, और उन्हें किसी भी संख्या में अंक लेकर पूर्णतया व्यक्त नहीं किया जा सकता। आप कितनी भी बड़ी संख्या में अंक लें, वे लगरथ का सन्निकट मान ही व्यक्त करेंगे; उसका मान उतना ही परिशुद्ध होगा, जितने अंक उसके पासंग में होंगे। वैज्ञानिक कार्यों के लिये ब्रिग्स के 14-अंकी लगरथों की शुद्धता भी पर्याप्त नहीं होती।[1] जब से लगरथों की खोज हुई है, तब से 500 से अधिक प्रकार की लगरथी सारणियां प्रकाश में आ चुकी हैं और अन्वीक्षक को इनके बीच कोई न कोई सारणी अपने काम लायक मिल ही जाती है। उदाहरण के लिये 20-अंकी लगरथों की भी एक सारणी है, जिसे फ्रांस के काले (1795) ने प्रकाशित किया था। दशमलव के अनेक अंकों वाले लगरथों की सारणियां भी हैं, पर उनका उपयोग बहुत कम लोग करते हैं। इनमें अंकों की संख्या इतनी है कि इन्हें लगरथी अजूबों का ही नाम दिया जा सकता है।

ये रही चंद विकट सारणियां (ये सभी दशभू नहीं बल्कि नैसर्गिक[2] हैं):

---

[1] ब्रिग्स के ये लगरथ सिर्फ 1 से 20 000 और 90 000 से 101 000 तक की संख्याओं के लिये हैं।

[2] नैसर्गिक लगरथों का आधार संख्या दस नहीं, संख्या 2.718... होती है, जिसके बारे में आगे चलकर बातें होंगी।

10 000 तक की संख्याओं के लिये वोल्फ़ाम की 48-अंकी सारणी ;

शार्प की 61-अंकी सारणी ;

पार्कहेर्स्ट की 102-अंकी सारणी। और अंत में सबसे विकट सारणी है –

ऐडम्स की 260-अंकी।

यह अंतिम सारणी सही अर्थ में सारणी नहीं है ; इसमें सिर्फ पाँच संख्याओं – 2, 3, 5, 7, 10 – के तथाकथित नैसर्गिक लगरथ दिये गये हैं और इन्हें दशभू में परिणत करने के लिये 260-अंकी गुणक दिये गये हैं। इन पाँच संख्याओं का लगरथ ज्ञात होने पर सरल जोड़ या गुणा के सहारे हम अनेक गुणज संख्याओं के लगरथ ज्ञात कर सकते हैं, जैसे – संख्या 12 का लगरथ 2, 2 तथा 3 के लगरथों का योगफल है।

लगरथी पटरी को भी एक अजूबा ही मानना चाहिये : इसका उपयोग बहुत विस्तृत हो चुका है और यद्यपि यह लगरथों के सिद्धांत पर ही काम करता है, इसे उपयोग में लाने वाले के लिये यह जानना बिल्कुल आवश्यक नहीं होता कि लगरथ क्या है।

मंच पर लगरथ

दर्शकों के सामने जबानी हिसाब लगाने वाले जादूगरों का एक खेल बहुतों को आश्चर्य में डाल देता है – कलनकर्ता विज्ञापनों में घोषणा करता है कि वह बहुअंकी संख्याओं के उच्च कोटि वाले मूल आनन-फानन में कलन कर सकता है ; आप घर में बैठकर धीरज के साथ किसी संख्या का 31-वां घात निकालते हैं और 'शो' पर पहुँचते हैं

कि 35 अंकों की संख्या के सामने तो वह हार मान ही लेगा, पर ऐसा नहीं होता। आप मौके पर कलनकर्ता से कहते हैं:

– जरा इस 35-अंकी संख्या का 31-वां मूल निकालने की कोशिश कीजिये तो! पहले आप लिख लीजिये, मैं बोलता जाता हूँ।

कलनकर्ता खल्ली लेता है और अभी पहला अंक बोलने के लिये आपने मूंह भी नहीं खोला कि वह उत्तर लिख देता है: 13.

बिना संख्या जाने वह मूल निकाल देता है, वह भी 31-वां, और ऊपर से जबानी और फिर बिजली की सी तेजी से! ...

आप अपना मुंह लेकर बैठ जाते हैं। लेकिन इसमें कोई जादू की बात नहीं है। रहस्य इतना ही है कि 13 एकमात्र संख्या है, जिसके 31-वें घात में 35 अंक होते हैं। 13 से कम की संख्या कम अंकों का घात देगी और अधिक की संख्या – अधिक अंकों का।

लेकिन कलनकर्ता को यह कैसे पता चला? उसने संख्या 13 कैसे ज्ञात की? वह इसे लगरथों की सहायता से ढूंढ़ता है, दो-अंकी लगरथों की सहायता से, जिन्हें वह प्रथम 15-20 संख्याओं के लिये कंठस्थ कर लेता है। इन्हें रटना इतना कठिन नहीं है, जितना आपको लगता है, विशेषकर यदि आप यह ध्यान में रखें कि गुणज संख्या का लगरथ उसके गुणनखंडों के लगरथों का योगफल होता है। यदि आप 2, 3 और 7 के लगरथ कंठस्थ कर लें, तो आप प्रथम दस संख्याओं के लगरथ ज्ञात कर ले सकते हैं; जैसे –

$$\lg 5 = \lg \frac{10}{2} = 1 - \lg 2\ ,\ (\lg = \log_{10}).$$

अगली दस संख्याओं के लिये आपको चार और संख्याओं के लगरथ रटने पड़ेंगे।

जो भी हो, कलन का जादूगर दो-अंकी लगरथों की निम्न सारणी कंठस्थ रखता है:

संख्या	लगरथ	संख्या	लगरथ
2	0.30	11	1.04
3	0.48	12	1.08
4	0.60	13	1.11
5	0.70	14	1.15
6	0.78	15	1.18
7	0.85	16	1.20
8	0.90	17	1.23
9	0.95	18	1.26
		19	1.28

आपको चक्कर में डालने वाले गणितीय जादू का रहस्य निम्न है :

$$\lg \sqrt[31]{(35 \text{ अंक})} = \frac{34\ldots}{31}$$

इष्ट लगरथ $\frac{34}{31}$ और $\frac{34.99}{31}$ के बीच, अर्थात् 1.09 और 1.13 के बीच हो सकता है।

इस अंतराल में सिर्फ एक पूर्ण संख्या का लगरथ है – संख्या 13 का लगरथ 1.11 ; दूसरी कोई पूर्ण संख्या नहीं है।

लोगों को हैरान करने वाले जादू का रहस्य इतना ही है। बेशक, यह सब मन ही मन तेजी से संपन्न करने के लिये काफी अभ्यास की आवश्यकता पड़ती है, लेकिन इसमें कोई जादू की बात नहीं है। इस तरह के 'जादू' आप भी दिखा सकते हैं – जबानी न कर सकें, तो कागज-कलम के साथ ही सही!

मान लें कि आपको प्रश्न दिया गया है: 20-अंकी संख्या का 64-वां मूल निकालें।

कौनसी संख्या है—यह बिना जाने ही आप उत्तर बता दे सकते हैं: मूल 2 है।

सचमुच, $\lg\sqrt[64]{(20\text{ अंक})} = \frac{19.\ldots}{64}$, ; अतः इसे $\frac{19}{64}$ और $\frac{19.99}{64}$ के बीच, अर्थात् 0.29 और 0.32 के बीच होना चाहिये। ऐसा लगरथ सिर्फ एक पूर्ण संख्या—2—का है: 0.30...

अब आप स्वयं वह संख्या बता दे सकते हैं, जो प्रश्नकर्त्ता आपको देने जा रहा था; इससे वह बिल्कुल दंग रह जायेगा। यह वही संख्या है, जितना गेहूँ शतरंज के आविष्कारक ने पुरस्कार स्वरूप मांगा था:

$$2^{64} = 18\,446\,744\,073\,709\,551\,616.$$

मवेशी-पालन में लगरथ

प्रश्न

तथाकथित 'प्राणरक्षक' चारे[1] की मात्रा जानवर के शरीर की बाह्य सतह के साथ समानुपाती होती है। इस तथ्य के आधार पर गणना करें कि 420kg भारी बैल के लिये प्राणरक्षक चारे में कितनी कैलोरी मात्रा होनी चाहिये, यदि 630kg भारी बैल को 13 500 कैलोरी की आवश्यकता होती है।

---

[1] चारे का अल्पतम अंश, जो जीव द्वारा तापहानि, आंतर अंगों के कार्यों और मृत कोशिकाओं के विस्थापन आदि में खर्च होता है, प्राणरक्षक चारा कहलाता है। 'उत्पादक' चारा जानवर के उस उत्पाद पर खर्च होता है, जिसके लिये उसे पाला जाता है।

हल

इस व्यावहारिक प्रश्न को हल करने में बीजगणित की ही नहीं, ज्यामिति की भी सहायता लेनी पड़ेगी। प्रश्न की शर्त्त के अनुसार इष्ट कैलोरी-मात्रा x बैल की सतह (s) के साथ समानुपाती है, अर्थात्

$$\frac{x}{13500}=\frac{s}{s_1}$$

जहां s_1 एक 630kg भारी बैल की सतह है। ज्यामिति से हम जानते हैं कि समरूप पिंडों की सतहें उनकी सानुरूप रैखिक मापों (l) के वर्गों के साथ समानुपाती हैं और उनके आयतन (इसीलिये भार भी) उनकी रैखिक मापों के घनों के साथ समानुपाती होते हैं। अतः

$$\frac{s}{s_1}=\frac{l^2}{l_1^2},\ \frac{420}{630}=\frac{l^3}{l_1^3},\ \text{इसलिये}\ \frac{l}{l_1}=\frac{\sqrt[3]{420}}{\sqrt[3]{630}},$$

जिससे

$$\frac{x}{13500}=\frac{\sqrt[3]{420^2}}{\sqrt[3]{630^2}}=\sqrt[3]{\left(\frac{420}{630}\right)^2}=\sqrt[3]{\left(\frac{2}{3}\right)^2}.$$

$$x=13\,500\sqrt[3]{\frac{4}{9}}$$

लगरथी सारणी की सहायता से:

$$x=10\,300.$$

बैल को 10 300 कैलोरी चाहिये।

संगीत में लगरथ

संगीतज्ञ गणित में कम ही रुचि रखते हैं, अधिकांशतः वे गणित को आदर की दृष्टि से देखते हैं, पर उससे दूर ही रहना पसंद करते हैं। लेकिन वास्तविकता यह है कि संगीतज्ञ गणित के साथ, और वह भी लगरथ जैसी कठिन बातों के साथ, कहीं ज्यादा संपर्क रखते हैं (उन्हें इस बात का संदेह भी नहीं होता)।

इसके बारे में यहां मैं भौतिकविद् स्वर्गीय आ० एइखेनवाल्द के निबंध का एक अंश प्रस्तुत कर रहा हूँ।[1)]

"पाठशाला में मेरे एक मित्र पियानो बजाते थे, पर गणित से उन्हें कोई प्रेम नहीं था। वे अक्सर उपेक्षा के साथ कहा करते थे कि गणित और संगीत में कोई मेल ही नहीं है: 'पीथागोरस ने ध्वनि-कंपनों के बीच कोई अनुपात ढूंढ़ा तो था, पर वह पैमाना हमारे संगीत में कहां अपनाया गया?"

आप कल्पना कर सकते हैं कि वे कितनी बुरी तरह आश्चर्यचकित हुए, जब मैं ने सिद्ध किया कि आधुनिक पियानो बजाने का मतलब है लगरथों के साथ खेल करना... सचमुच, संस्कारित वर्ण-पैमाना के तथाकथित सोपान की दूरियां कंपन-आवृत्तियों या ध्वनि-तरंगों की लंबाइयों के अनुपात में नहीं, बल्कि इन राशियों के <u>लगरथों</u> के अनुपात में होती हैं। एक ही बात है कि इन लगरथों का आधार 2 होता है, न कि आम स्थितियों की तरह 10।

मान लें कि निम्नतम अष्टक (तथाकथित शून्य अष्टक) के 'डो' को प्रति सेकेंड n कंपन के रूप में निर्धारित किया गया है।

[1)] निबंध 'रूसी ज्योतिर्विज्ञानी कैलेंडर–1919' में छपा था और उसका शीर्षक था 'छोटी-बड़ी दूरियां'।

तब प्रथम अष्टक का 'डो' प्रति सेकेंड $2n$ कंपन देगा और m-वें अष्टक का 'डो' प्रति सेकेंड $n \cdot 2^m$ कंपन देगा। हर अष्टक के 'डो' को शून्य मानकर वर्ण-पैमाने के सभी स्वरों को संख्याओं p द्वारा द्योतित करते हैं; इस स्थिति में सुर 'सोल' 7-वां होगा, 'ला' नौवां होगा, आदि; 12-वां सुर फिर से 'डो' होगा लेकिन अगले अष्टक में। चूंकि संस्कारित वर्ण-पैमाने में हर अगला सुर $\sqrt[12]{2}$ अधिक कंपन देता है, इसलिये हर सुर के कंपन की आवृत्ति सूत्र से व्यक्त हो सकती है:

$$Npm = n \cdot 2^m (\sqrt[12]{2})^p.$$

इस सूत्र का लगरथन करने पर:

$$\log_2 Npm = \log_2 n + m \log_2 2 + p \frac{\log_2 2}{12}$$

या

$$\log_2 Npm = \log_2 n + \left(m + \frac{p}{12}\right) \log_2 2,$$

निम्नतम 'डो' की आवृत्ति को इकाई ($n=1$) मानने पर

$$\log_2 Npm = m + \frac{p}{12}$$

इससे स्पष्ट है कि पियानो के रीडों की क्रम-संख्याएं तदनुरूप स्वरों[1] की कंपन-आवृत्तियों के लगरथ हैं। हम यह भी कह सकते हैं कि अष्टक की संख्या इस लगरथ का पूर्णांक है और इस अष्टक[2] के स्वरों की क्रम-संख्या लगरथ का भिन्नांक (या पासंग) है।"

---

[1] 12 से गुणित।

[2] 12 से विभाजित।

समझने के लिये अपनी ओर से एक उदाहरण देता हूँ: तीसरे अष्टक के सुर 'सोल' अर्थात् संख्या $3+\frac{7}{12}(\approx 3.583)$ में संख्या 3 इस सुर की आवृत्ति के लगरथ का पूर्णांक है और $\frac{7}{12}$ (≈ 0.583) इसी लगरथ का पासंग है (लगरथ का आधार 2 है); अतः इस सुर की कंपन-आवृत्ति $2^{3.583}$ है, अर्थात् प्रथम अष्टक के 'डो' से 11.98 गुना अधिक है।

सितारे, शोर और लगरथ

इन तीनों में कोई मेल नजर नहीं आता, पर सितारों और शोर का लगरथ के साथ घना संबंध है।

सितारों और शोर को एक शीर्षक में रखा गया है, क्योंकि सितारों की चमक और शोर का जोर (वज्रिता, लाउडनेस) समान विधि से नापे जाते हैं—लगरथी पैमाने से।

ज्योतिर्विद सितारों को दृश्य चमक के आधार पर प्रथम कोटि, द्वितीय कोटि, तृतीय कोटि आदि में बाँटते हैं। कोटियों का क्रम समांतर श्रेढ़ी में प्रतीत होता है, पर उनकी भौतिक चमक अन्य नियम के अनुसार बदलती है: वास्तविक चमक गुणोत्तर श्रेढ़ी के रूप में बदलती है, जिसका सार्विक गुणक 2.5 होता है। अब आप सरलता से समझ सकते हैं कि सितारों की 'कोटि' और कुछ नहीं, उसकी भौतिक चमक का लगरथ है। उदाहरण के लिये, तीसरी कोटि का सितारा प्रथम कोटि के सितारे की तुलना में 2.5^{3-1}, अर्थात् 6.25 गुनी अधिक होती है। यदि संक्षेप में कहें, तो सितारों की दृश्य चमक का मूल्यांकन करते वक्त ज्योतिर्विद लगरथी सारणी का प्रयोग करता है, जिसमें आधार 2.5 होता है। यहां इन रोचक संबंधों को अधिक विस्तार

से नहीं देखेंगे, क्योंकि इन्हें मेरी अन्य पुस्तक 'मनोरंजक ज्योतिर्विज्ञान' में पर्याप्त स्थान दिया गया है।

वज्रिता (शोर का जोर या ध्वनि की तीव्रता) का भी मूल्यांकन इसी प्रकार से होता है। मजदूरों के स्वास्थ्य और उनकी उत्पादनशीलता पर औद्योगिक शोर के बुरे प्रभाव के कारण वज्रिता के शुद्ध-शुद्ध सांख्यिक मूल्यांकन की आवश्यकता पड़ी। वज्रिता की इकाई 'बेल' है[1]; व्यवहार में इसके दसवें भाग – 'डेसीबेल' – का उपयोग होता है। वज्रिता की क्रमिक कोटियां – 1 बेल, 2 बेल आदि (व्यवहारतः 10 डेसीबेल, 20 डेसीबेल आदि) – कानों के लिये समांतर श्रेढ़ी बनाती हैं। पर शोर की भौतिक 'शक्ति' (यदि और सही कहें तो – उसकी ऊर्जा) गुणोत्तर श्रेढ़ी बनाती है, जिसका सार्विक गुणक 10 होता है। वज्रिता में 1 बेल का अंतर दो भिन्न 'शोरों' की ऊर्जाओं के अनुपात 10 के अनुरूप है। इसका मतलब है कि बेल में व्यक्त वज्रिता उसकी भौतिक ऊर्जा के दशभू लगरथ के बराबर है।

कुछ उदाहरण देखने पर बात और भी स्पष्ट हो जायेगी।

पत्तों की शांत सरसराहट का मूल्य 1 बेल में आँका जाता है, जोर से बातचीत की वज्रिता 6.5 बेल है, शेर का गर्जन 8.7 बेल जितनी तीव्रता रखता है। इससे निष्कर्ष निकलता है कि बातचीत की ध्वनि पत्तियों की सरसराहट की तुलना में

$$10^{6.5-1}=10^{5.5}=316\,000 \text{ गुनी}$$

अधिक जोरदार है; बातचीत की तुलना में शेर का गर्जन

$$10^{8.7-6.5}=10^{2.2}=158 \text{ गुनी}$$

अधिक तीव्र है।

---

[1] टेलीफोन के आविष्कारक ग्राहम बेल के सम्मान में। – अनु०

8 बेल से अधिक वज्रिता का शोर मानव-स्वास्थ्य के लिये हानिकर माना जाता है, लेकिन कई कारखानों में 10 बेल से भी अधिक शोर होता है; फौलादी पट्टे पर हथौड़े की चोट 11 बेल का शोर देती है। ये शोर अनुमत स्तर से 100 तथा 1 000 गुना अधिक तीव्र हैं और नियागार जलप्रपात के सबसे कोलाहलमय स्थल (9 बेल) से 10-100 गुना अधिक तीव्र हैं।

क्या यह एक संयोग की बात है, कि सितारों की दृश्य चमक और शोर की वज्रिता दोनों को ही नापने में अनुभूति की मात्रा और उसे उत्पन्न करने वाले क्षोभक के बीच लगरथी निर्भरता प्रेक्षित होती है? नहीं, दोनों ही एक सार्विक नियम के परिणाम हैं, जिसका नाम 'फेख्नेर का मनोभौतिकीय नियम' है। नियम कहता है: अनुभूति (या संवेदना) की मात्रा क्षोभक की मात्रा के लगरथ के साथ समानुपाती होती है।

आप देख रहे हैं कि लगरथ मनोविज्ञान के क्षेत्र में भी दखल रखता है।

बल्ब का प्रकाश और लगरथ

प्रश्न

गैसपूर्ण बल्ब निर्वातित बल्ब की तुलना में कहीं अधिक प्रकाश देता है, यद्यपि दोनों में उत्तप्त होने वाला सूत समान पदार्थ से बना होता है। इसका कारण दोनों में सूत के तापक्रमों की भिन्नता है। भौतिकी द्वारा निर्धारित नियम के अनुसार सफेद उत्तप्त अवस्था में सूत द्वारा उत्सर्जित प्रकाश परम तापक्रम के 12-वें घात के साथ समानुपाती है। इस तथ्य को ध्यान में रखते हुए निम्न कलन करते हैं: गैसपूर्ण बल्ब, जिसमें सूत 2 500K तापक्रम तक गर्म है (K, केल्विन के

पैमाने पर $-273°C$ को शून्य माना जाता है), कितना गुना अधिक प्रकाश देगा, यदि उसकी तुलना निर्वातित बल्ब से की जाये, जिसका सूत $2\,200K$ तक गर्म है।

हल

इष्ट व्यतिमान (या अनुपात) को x से द्योतित करते हैं, समीकरण मिलता है:

$$x=\left(\frac{2500}{2200}\right)^{12}=\left(\frac{25}{22}\right)^{12},$$

जिससे

$$\lg x=12(\lg 25-\lg 22); \quad x=4.6.$$

गैसपूर्ण बल्ब निर्वातित की तुलना में 4.6 गुना अधिक प्रकाश देता है। इसका अर्थ है कि यदि निर्वातित बल्ब 50 कैंडेल के बराबर प्रकाश देता है, तो गैसपूर्ण बल्ब उन्हीं परिस्थितियों 230 में कैंडेल प्रकाश देगा।

एक और कलन करते हैं: परम तापक्रम कितना प्रतिशत ऊँचा किया जाये कि बल्ब की चमक दुगुनी हो जाये?

हल

समीकरण बनाते हैं

$$\left(1+\frac{x}{100}\right)^{12}=2,$$

जिससे

$$\lg\left(1+\frac{x}{100}\right)=\frac{\lg 2}{12} \quad \text{और} \quad x=6\%$$

अंत में एक तीसरा कलन किया जाये: यदि बल्ब में सूत का परम तापक्रम 1% बढ़ जाये, तो बल्ब की चमक कितना प्रतिशत बढ़ेगी?

हल

समीकरण

$$x = 1.01^{12}$$

में लगरथों के उपयोग से x का मान ज्ञात करते हैं:

$$x = 1.13.$$

चमक में 13% की वृद्धि होती है।

तापक्रम में 2% वृद्धि के लिये कलन संपन्न करने पर ज्ञात होता है कि चमक में 27% वृद्धि हुई है; तापक्रम में 3% वृद्धि से चमक 43% बढ़ जाती है।

इसी से स्पष्ट हो जाता है कि बल्ब बनाने के तकनीक में उत्तप्त होने वाले सूत के तापक्रम को ऊँचा करने पर इतना अधिक ध्यान क्यों दिया जाता है, हर अतिरिक्त डिग्री को भी इतना कीमती क्यों माना जाता है।

सौ साल की वसीयत

शतरंज के आविष्कारक ने पुरस्कार स्वरूप गेहूँ के जितने दाने मांगे थे, इसके बारे में दंतकथा सभी जानते होंगे। वह शतरंज के एक घर के लिये 1 दाना, दूसरे घर के लिये 2 दाना, तीसरे घर के लिये 4 दाना आदि के हिसाब से चौसठ घरों के लिये गेहूँ मांग रहा था, जिससे दानों की कुल संख्या विराट रूप ग्रहण कर गयी थी।

लेकिन संख्याएं सिर्फ दुगुना करने पर ही इतनी अप्रत्याशित गति से बढ़ें – ऐसी बात नहीं है। थोड़ा-थोड़ा करके बढ़ने पर भी वे बहुत बड़ी हो जा सकती हैं। 5% सूद देने वाली पूंजी हर साल 1.05 गुनी ही बढ़ती है, पर पर्याप्त समय बीत जाने पर वह एक विशाल धनराशि में परिणत हो जा सकती है। इसीलिये वसीयत में मिली पूंजी भी लंबे समय बाद बहुत बड़ी हो जाती है। विश्वास भी नहीं होता कि आदमी अपने पीछे एक छोटी-सी पूंजी छोड़ जाता है और वसीयत में बड़ी-बड़ी धनराशियां खर्च करने को कहता है। हम अमेरिका के विख्यात राजनेता बेंजामीन फ्रैंकलीन के वसीयतनामा का उदाहरण दे सकते हैं, जो उनके रचना-संग्रहों से ली गयी है:

"एक हजार पौंड स्टर्लिंग बोस्टनवासियों को अर्पित करता हूँ। यदि वे यह एक हजार पौंड ग्रहण करें, तो उन्हें इसे चुनिंदे नागरिकों के हाथ सुपुर्द कर देनी चाहिये, जो इसे वर्ष में 5 प्रतिशत की दर से युवा हस्तकारों को ऋण दिया करेंगे।[1] सौ वर्षों में यह राशि 131 000 पौंड स्टर्लिंग हो जायेगी। मैं चाहता हूँ कि तब 100 000 पौंड सार्वजनिक भवनों के निर्माण में खर्च हों और बाकी 31 000 पौंड अगले 100 वर्षों के लिये ऋण दिये जायें। दूसरी शती के अंत में 4 060 000 पौंड स्टर्लिंग की राशि होगी, जिसमें से 1 060 000 पौंड बोस्टन-वासियों के हाथ सौंपता हूँ, और 3 000 000 मासाखुसेट समाज को... और आगे अपनी दृष्टि बढ़ाने का साहस नहीं करता।"

सिर्फ हजार पौंड देकर फ्रैंकलीन करोड़ों का वितरण कर रहे थे। लेकिन इसमें आश्चर्य की कोई बात नहीं है। गणितीय कलन दिखाते हैं कि वसीयतनामा में जो कुछ लिखा गया था, वह सही है। 1 000 पौंड में हर साल 1.05 गुना वृद्धि होती है, अतः 100 वर्ष बाद राशि मिलेगी

$$x = 1000 \cdot 1.05^{100} \text{ पौंड।}$$

[1] उस जमाने में अमरीका में बैंक जैसे ऋणदाता संस्थान नहीं थे।

इस व्यंजन का कलन लगरथों की सहायता से किया जा सकता है :

$$\lg x = \lg 1000 + 100 \lg 1.05 = 5.11893,$$

जिससे

$$x = 131\,000$$

वसीयतनामा में यही राशि बतायी गयी थी। आगे, 31 000 पौंड अगले सौ वर्ष में निम्न आकार ग्रहण करेगा :

$$y = 31\,000 \cdot 1.05^{100},$$

जिससे (लगरथों की सहायता से कलन करने पर)

$$y = 4\,076\,500$$

यह राशि वसीयतनामा की राशि से काफी भिन्न है।

निम्न प्रश्न पाठक स्वयं हल करने की चेष्टा करें; यह साल्तिकोव-श्चोद्रीन की कृति 'गोलोव्लेव खानदान' के एक अंश पर आधारित है, जो नीचे उद्धृत है :

"पोर्फीरी व्लादीमिरोविच अपने कैबिनेट में बैठकर अंकों की कतारें लिखते चले जा रहे हैं। इस बार उनका ध्यान निम्न प्रश्न पर गया है : यदि उनके जन्म के समय दादा ने मुँहदिखाई के जो 100 रूबल दिये थे, उनको माँ ने खर्च करने की बजाय बंधक की दूकान में पोर्फीरी के नाम जमा कर दिये होते, तो आज उनके पास कितने पैसे होते? लेकिन लगता है कि ज्यादा नहीं होते : सिर्फ आठ सौ रूबल होते।"

यदि यह मान लिया जाये कि हिसाब उन्होंने सही लगाया था (इसकी उम्मीद कम ही है—गोलोव्लेव चक्रवृद्धि व्याज के हिसाब और लगरथ से शायद ही परिचित रहा हो), तो बतायें कि उस समय बंधक की दूकान कितने प्रतिशत व्याज देती थी?

पूँजी की बढ़ोत्तरी

बैंक में व्याज हर वर्ष मूल धन में शामिल कर दिया जाता है। यदि शामिल करने की क्रिया और जल्दी-जल्दी दुहराई जाये (शामिल करने की आवृत्ति बढ़ा दी जाये), तो पूँजी और तेजी से बढ़ने लगेगी, क्योंकि मूल धन बढ़ता रहता है और उस पर कुछ व्याज भी। सैद्धांतिक तौर पर एक सरलीकृत उदाहरण लेते हैं। मान लें कि 100% प्रति वर्ष की दर पर 100 रूबल बैंक में रखे गये। यदि वर्ष में व्याज का धन मूल धन में सिर्फ एक बार शामिल किया जायेगा, तो वर्ष के अंत में मूल धन 200 रूबल हो जायेगा।

अब देखें कि व्याज का धन मूल धन में हर छे महीने में शामिल करने पर क्या होगा। छे महीने बीतने पर 100 रूबल की राशि बढ़ कर हो जायेगी

$$100 \cdot 1.5 = 150 \text{ रूबल।}$$

और फिर अगले छे महीने बाद—

$$150 \cdot 1.5 = 225 \text{ रूबल।}$$

यदि व्याज हर $\frac{1}{3}$ वर्ष बाद मूल धन में शामिल किया जाये, तो वर्ष के अंत में 100 रूबल बढ़कर हो जायेगा—

$$100 \text{ रूबल} \cdot \left(1\frac{1}{3}\right)^3 \approx 237 \text{ रूबल } 03 \text{ कोपेक।}$$

मूल धन में व्याज यदि हर 0.1 वर्ष पर, हर 0.01 वर्ष पर, हर 0.001 वर्ष पर शामिल किया जाये, तो निम्न परिणाम मिलेंगे ;

$$100 \text{ रूबल} \cdot 1.1^{10} \approx 259 \text{ रूबल } 37 \text{ कोपेक}$$
$$100 \text{ रूबल} \cdot 1.01^{100} \approx 270 \text{ रूबल } 48 \text{ कोपेक}$$
$$100 \text{ रूबल} \cdot 1.001^{1000} \approx 271 \text{ रूबल } 69 \text{ कोपेक}$$

उच्च गणित की विधियों से सिद्ध किया जाता है कि व्याज को पूंजी में शामिल करने की मीयाद असीम छोटा करने पर पूंजी में असीम वृद्धि नहीं होगी, वह एक सीमा के निकट होता जायेगा, जिसका सन्निकट[1] मान है:

271 रूबल 83 कोपेक।

100% की दर से रखी गयी पूंजी में 2.7183 गुनी से अधिक वृद्धि नहीं होती – व्याज को मूल धन में हर सेकेंड शामिल करने पर भी नहीं।

संख्या 'e'

प्राप्त संख्या 2.718... की उच्च गणित में बहुत बड़ी भूमिका है; यह शायद संख्या π से कम महत्त्वपूर्ण नहीं है और इसे वर्ण e से द्योतित करते हैं। यह एक अव्यतिमानी (अपरिमेय) संख्या है: इसे सीमित संख्या में लिये गये अंकों से व्यक्त नहीं किया जा सकता।[2] इसका सिर्फ सन्निकट मान कलित किया जा सकता है – किसी भी कोटि की शुद्धता से! इसके लिये निम्न संकल (योग) ज्ञात करना पड़ता है:

$$1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}+\ldots$$

---

[1] यहां कोपेक के अंशों को छोड़ दिया गया है।

[2] साथ ही यह संख्या π की भाँति अबीजीय भी है, अर्थात् इसे [illegible] संख्याओं में संगुणकों वाले किसी भी समीकरण के हल के रूप में [illegible] नहीं किया जा सकता।

चक्रवृद्धि व्याज के कारण पूंजी की बढ़ोत्तरी के उपरोक्त उदाहरण से सरलतापूर्वक देखा जा सकता है कि संख्या e और कुछ नहीं, व्यंजन

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

की सीमा है (जब n का असीम वर्धन होने लगता है)।

e को लगरथों का आधार बनाना कई दृष्टिकोणों से लाभकर है, जिन्हें हम यहां नहीं समझा सकते। ऐसी सारणियां ('नैसर्गिक लगरथों की सारणियां') बन चुकी हैं और विज्ञान तथा तकनीक में उनका बहुत विस्तृत उपयोग है। 48, 61, 102 और 260 अंकों वाले जिन भारी-भरकम लगरथों के बारे में पहले बताया गया था, वे आधार e के लिये ही कलित किये गये हैं।

संख्या e ऐसी-ऐसी जगहों पर नजर आ जाती है, जहां इसकी कोई आथा नहीं की जाती। उदाहरण के लिये निम्न प्रश्न देखें:

संख्या a को किन भागों में बाँटा जाये कि सभी भागों का गुणनफल अधिकतम हो? हम जानते हैं कि योगफल स्थिर होने पर संख्याओं का गुणनफल तभी अधिकतम होता है, जब संख्याएं बराबर होती हैं। इससे स्पष्ट है कि संख्या a को बराबर भागों में बाँटना चाहिये। पर कितने बराबर भागों में? उच्च गणित की विधियों से स्थापित किया गया है कि अधिकतम गुणनफल तब मिलता है, जब हर भाग यथासंभव e के बराबर होता है।

जैसे, 10 को इतने भागों में बाँटना चाहिये कि हर भाग का मान यथासंभव 2.718... के बराबर हो। इसके लिये निम्न भागफल ज्ञात करना चाहिये:

$$\frac{10}{2.718\ldots}=3.678\ldots$$

चूंकि 3.678... बराबर भागों में बाँटना संभव नहीं है, इसलिये

भाजक के रूप में निकटस्थ पूर्ण संख्या 4 लेते हैं। अतः दस के टुकड़ों का अधिकतम गुणनफल तब प्राप्त होगा, जब ये टुकड़े $\frac{10}{4}=2.5$ के बराबर होंगे।

मतलब कि

$$(2.5)^4=39.0625$$

ही सबसे बड़ी संख्या है, जो 10 के तुल्य भागों को आपस में गुणा करने से प्राप्त हो सकती है। सचमुच, 10 को 3 और 5 तुल्य भागों में बाँटकर देखिये, गुणनफल कम होगा:

$$\left(\frac{10}{3}\right)^3=37,$$
$$\left(\frac{10}{5}\right)^5=32.$$

20 के तुल्य भागों से अधिकतम गुणनफल प्राप्त करने के लिये उसे 7 समान भागों में बाँटना चाहिये, क्योंकि

$$20:2.718...=7.36\approx 7.$$

संख्या 50 को 18 भागों में बाँटना चाहिये और संख्या 100 को 37 भागों में, क्योंकि

$$50:2.718...\approx 18.4,$$
$$100:2.718...\approx 36.8.$$

संख्या e गणित, भौतिकी, ज्योतिर्विज्ञान तथा अन्य अनेक विज्ञानों में बहुत महत्त्वपूर्ण भूमिका निभाती है।

ये रहे चंद प्रश्न, जिनके गणितीय निरीक्षण में इस संख्या की आवश्यकता पड़ती है (सूची असीम लंबी की जा सकती है):

बैरोमीटरी सूत्र (ऊँचाई बढ़ने पर दाब घटने का सूत्र),
ऐलर का सूत्र,[1)]
रश्मिसक्रिय क्षय और पृथ्वी की आयु,
हवा में दोलक का दोलन,
राकेट के वेग के लिये त्सियोल्कोव्स्की का सूत्र,
रेडियो-परिपथ में दोलन-संवृत्तियां,
कोशिकाओं का प्रजनन।

लगरथी प्रहसन

अध्याय 5 में जिन गणितीय प्रहसनों के साथ पाठक का परिचय हुआ था, उन्हीं की तरह का एक प्रहसन यहां भी दे रहे हैं:

सिद्ध करें: $2 > 3$.

इस बार लगरथन की क्रिया भी भाग ले रही है। प्रहसन निम्न असमिका से शुरू होता है:

$$\frac{1}{4} > \frac{1}{8},$$

जो बिल्कुल सही है। अब निम्न रूपांतरण होता है:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 > \left(\frac{1}{2}\right)^3$$

इसमें भी कोई संदेह नहीं हो सकता। बड़ी संख्या बड़े लगरथ के

[1)] इसके बारे में दे० मेरी 'मनोरंजक भौतिकी', पुस्तक 2 में।

अनुरूप होती है, अतः

$$2\lg\frac{1}{2} > 3\lg\frac{1}{2}.$$

दोनों तरफ $\lg\frac{1}{2}$ काट देने पर मिलता है:

$$2 > 3.$$

प्रमाण में क्या गलती हुई है?

गलती यह है कि $\lg\frac{1}{2}$ को काटते वक्त असमिका का चिन्ह नहीं बदला गया था; उसे $>$ की जगह $<$ लिखना चाहिये था, क्योंकि $\lg\frac{1}{2}$ एक ऋण संख्या है। आधार 10 वाले लगरथ के लिये $\log_{10}$ की जगह सिर्फ lg प्रयुक्त करते हैं। ऊपर के प्रमाण में यदि हम लगरथन 10 के आधार पर नहीं, बल्कि $\frac{1}{2}$ से किसी छोटे आधार a पर करते, तो संख्या $\frac{1}{2}$ का लगरथ $\log_a\frac{1}{2}$ धनात्मक ही रहता, पर उस स्थिति में हम यह नहीं कह सकते थे कि बड़ी संख्या बड़े लगरथ के अनुरूप होती है।

हर संख्या – तीन दुक्कों से

प्रश्न

पुस्तक का समापन हम एक रोचक बीजगणितीय पहेली से करते हैं, जिससे ओदेसा में भौतिकविदों के एक अधिवेशन के सदस्य अपना मनोरंजन कर रहे थे। प्रश्न था: किसी भी धनात्मक पूर्ण संख्या को तीन दुक्कों और गणितीय चिन्हों की सहायता से व्यक्त करें।

हल

पहले कुछ खास उदाहरणों के लिये प्रश्न का हल देखें। मान लें कि संख्या 3 दी गयी है। हल निम्न है:

$$3 = -\log_2 \log_2 \sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}.$$

इस समिका की सत्यता सरलतापूर्वक जाँची जा सकती है:

$$\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}} = \left[\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{2^3}} = 2^{2^{-3}},$$

$$\log_2 2^{2^{-3}} = 2^{-3}, \quad -\log_2 2^{-3} = 3.$$

यदि संख्या 5 दी गयी होती, तो हल निम्न होता:

$$5 = -\log_2 \log_2 \sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}}}.$$

यहां हम इस बात का उपयोग कर रहे हैं कि वर्गमूल का सूचकांक नहीं लिखा जाता।

प्रश्न का सार्विक हल निम्न है। यदि प्रत्त संख्या N है, तो

$$N = -\log_2 \log_2 \underbrace{\sqrt{\sqrt{\cdots \sqrt{\sqrt{2}}}}}_{N \text{ बार}},$$

अर्थात् वर्गमूल के चिन्हों की संख्या प्रत्त संख्या के बराबर है।

पाठकों से

मीर प्रकाशन इस पुस्तक के अनुवाद और डिजाइन सम्बन्धी आपके विचारों के लिये आपका अनुगृहीत होगा। आपके अन्य सुझाव प्राप्त करके भी हमें बड़ी प्रसन्नता होगी। कृपया हमें इस पते पर लिखिये :

मीर प्रकाशन
पेर्वी रीज्स्की पेरेऊलोक, 2
मास्को, सोवियत संघ।

प्रकाशनाधीन !

गणितीय सिद्धांतों, सूत्रों व
विधियों की शीघ्र जानकारी के लिये
'मीर' प्रकाशन-गृह
की नवीन छात्रोपयोगी पुस्तक

मा. या. विगोद्स्की

सरल गणित निदर्शिका

विद्यालय की उच्च कक्षाओं के
विद्यार्थी इसका पाठ्य-पुस्तक
की भाँति भी उपयोग कर सकते हैं।